高等职业教育公共课精品教材
新时代课程思政建设配套教材

# 经 济 数 学

王中兴　王　岳　主编

北京出版集团
北京出版社
北京教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

经济数学/王中兴，王岳主编. —北京：北京出版社：北京教育出版社，2022.6
ISBN 978-7-200-17259-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①王… ②王… Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 118642 号

**经济数学**

王中兴　王岳　主编

*

北京出版集团
北京出版社　出版
北京教育出版社
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码：100120

网址：www.bph.com.cn
京版北教文化传媒股份有限公司总发行
全国各地书店经销
北京盛通印刷股份有限公司印刷

*

889 mm×1 194 mm　16 开本　17.5 印张　480 千字
2022 年 6 月第 1 版　2022 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-17259-1

定价：54.00 元

质量监督电话：(010)58572525　58572393　　购书电话：(010)59812309

# PREFACE 前言

高职高专教育是高等教育不可或缺的一个重要组成部分.高职高专教育的目标是培养社会需要的一线人才,即技术应用型人才,以适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求.

经济数学是经济类与管理类专业的主要课程之一,是一门重要的基础课程.学生通过学习这门课程,能够掌握微积分学、线性代数及概率论与数理统计的基础知识,并提高逻辑思维能力和应用数学方法解决经济管理中实际问题的能力.

本书是按照新形势下教材改革的精神,遵循高职高专教育经济数学课程教学基本要求编写的,在编写的过程中力求体现以下几个特点.

(1)从高职高专教育的实际出发,结合数学教学改革的实际经验,按照“以应用为目的,以必须够用为度”的原则,以“理解基本概念,掌握运算方法及应用”为依据,删去了不必要的逻辑推导,强化了基本概念的教学.

(2)融合课程思政理念,设计了“育人目标”“思政元素”“思政园地”等模块,旨在坚定学生理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、增长知识见识、培养奋斗精神,提升学生综合素质.

(3)体现经济数学的特点,注重经济管理中的数学方法介绍,让学生学以致用.

(4)较好地处理了初等数学与高等数学的过渡与衔接,对数学理论的叙述更加通俗、易懂,淡化了深奥的逻辑论证,强化了几何直观学习,便于学生理解和掌握.

(5)为了方便教与学,在例题的选取上由浅入深,让学生从中加深对基本概念的理解和对基本方法的掌握.每节配有习题,每章配有复习题,书后附有参考答案.

本书共分为3篇,11章,包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、行列式、矩阵、线性方程组、概率论初步、数理统计初步.书后附有标准正态分布函数表、$\chi^2$分布表、$t$分布上侧分位数表和泊松分布表.

在本书的编写过程中，我们参阅了大量的有关经济数学的书籍，并引用了其中的一些资料，在此向有关作者深表感谢. 本书可作为高职高专院校公共基础课教材，也可作为广大青年朋友学习经济数学的参考用书.

由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便日后修订和完善.

编　者

# 目录

CONTENTS

# 第一篇 微积分学

由于函数概念的产生和运用的加深，也由于科学技术发展的需要，产生了微积分学. 微积分学在数学发展中的地位十分重要. 微积分学是微分学和积分学的总称，主要包括函数、极限、微分学、积分学及其应用. 其中，函数是微积分学研究的基本对象，极限是微积分学的基本概念，微分和积分是特定过程特定形式的极限.

# 第一章 极限与连续

## 育人目标

◎ 培养科学态度和理性精神，提高思维能力.

◎ 用联系的普遍性来看待函数中两个变量间相互依存的关系.

◎ 揭示函数概念的形成过程，体会其中蕴含的数学思想方法.

## 本章导读

在解决一些实际问题时，需要研究变量的变化趋势. 例如，当自变量无限接近于某个常数时，函数无限接近于什么？这就需要极限理论. 极限理论是微积分学的基本推理工具，微积分学中的很多概念和定理都是用极限方法推导出来的. 本章将主要介绍极限与连续的基本概念，以及它们的一些性质，为进一步学好微积分打下基础.

# 第一节 函数

## 一、函数的概念

函数的基本概念

### 1. 函数的定义

**定义 1** 设 $D$ 是由数组成的集合. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 $y$ 按照一定的对应法则 $f$ 总有唯一确定的数值和它对应,那么将对应法则 $f$ 称为在 $D$ 上 $x$ 到 $y$ 的一个**函数**,记作$y=f(x)$,$x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**,$D$ 称为函数的**定义域**.

当 $x$ 取 $x_0\in D$ 时,与 $x_0$ 对应的 $y$ 的数值称为函数在点 $x_0$ 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$. 当 $x$ 取遍 $D$ 中的一切数时,对应的函数值集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

在函数的定义中,如果对于每一个 $x\in D$,都有唯一的 $y$ 与它对应,那么这种函数称为**单值函数**;若同一个 $x$ 值可以对应多于一个的 $y$ 值,那么这种函数称为**多值函数**. 例如,由方程 $x^2+y^2=9$ 所确定的以 $x$ 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{9-x^2}$是一个多值函数,而它的每一个“分支”$y=\sqrt{9-x^2}$或 $y=-\sqrt{9-x^2}$都是单值函数. 以后如果没有特别说明,所说的函数都是指单值函数.

### 2. 函数的表示法

(1) 表格法:将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法,如三角函数表、常用对数表及经济分析中的各种统计报表等.

(2) 图象法:用图象表示两个变量的函数关系的方法,如图1-1 所示.

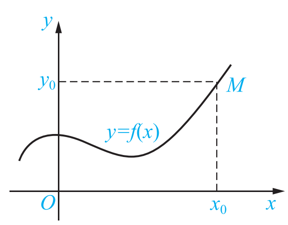


图 1-1

(3) 解析法:用一个等式表示两个变量的函数关系的方法,如 $y=x+3$,$y=\lg(x+2)$等.

### 3. 函数的定义域

在实际问题中,函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义,而仅就抽象的解析式来研究函数时,定义域就取使解析式有意义的自变量的全体. 要使解析式有意义,通常考虑以下几点:

(1)分式的分母不能为零;

(2)偶次根式的被开方数必须为非负数;

(3)对数式中的真数必须大于零;

(4)幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域;

(5)若函数表达式是由几个数学式子组成,则其定义域应取各部分定义域的交集;

(6)分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

**思政元素**

中国数学家熊庆来在“函数理论”领域造诣很深. 1932 年，他第一次代表中国出席了在瑞士苏黎世召开的国际数学家大会. 1933 年，他获得法国国家理科博士学位，成为第一个在国际上得到最高学位的中国人. 1934 年，他发表了论文《关于无穷级整函数与亚纯函数》. 在这篇论文中，熊庆来所定义的“无穷级函数”，在国际上被称为“熊氏无穷数”，被载入世界数学史册，奠定了他在国际数学界的地位.

**【例 1】** 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0, \\ 3, & 0\leqslant x<1, \\ \ln(2x-1), & x\geqslant 1.\end{cases}$ 求 $f(-3)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f(1+h)$.

**【解】**

$$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3,$$

$$f(1+h)=\begin{cases}\sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0 \\ 3, & 0\leqslant 1+h<1 \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h\geqslant 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1, \\ 3, & -1\leqslant h<0, \\ \ln(1+2h), & h\geqslant 0.\end{cases}$$

**【例 2】** 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

**【解】** (1) 为使函数有意义，则 $x^2+2x+1\neq 0$，即 $(x+1)^2\neq 0$，即 $x\neq -1$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2) 为使函数有意义，则 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0, \\ x^2-1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2, \\ x>1 \text{ 或 } x<-1,\end{cases}$ 解得 $1<x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x<-1$. 所以函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

## 二、函数的几种特性

函数的性质

### 1. 奇偶性

**定义 2** 设函数的定义域 $D$ 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为**偶函数**. 否则 $f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

奇函数的图象关于原点对称，如图 1-2 所示；偶函数的图象关于 $y$ 轴对称，如图 1-3 所示.

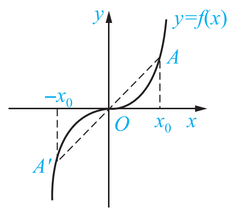


图 1-2

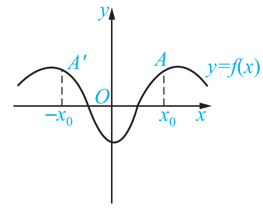


图 1-3

**注　意**

在判断函数的奇偶性时，一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称.

若不关于原点对称，则为非奇非偶函数.

**【例 3】** 判断下列函数的奇偶性.

（1）$f(x)=x^2$；　　（2）$f(x)=2\sin 2x$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；　　（4）$f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

**【解】**（1）因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

（2）因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=2\sin(-2x)=-2\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)=2\sin 2x$ 是奇函数.

（3）因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不关于原点对称，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ 是非奇非偶函数.

（4）因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，又因为任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都有 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 是偶函数.

### 2. 单调性

**定义 3**　若对于区间 $D$ 内任意的两点 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$ 时：

如果恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在区间 $D$ 上单调增加，称 $f(x)$ 为 $D$ 上的单调递增函数，区间 $D$ 称为 $f(x)$ 的单调增区间；特别地，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 $D$ 上的严格增函数. 如果恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么 $f(x)$ 在区间 $D$ 上单调减少，称 $f(x)$ 为 $D$ 上的单调递减函数，区间 $D$ 称为 $f(x)$ 的单调减区间；特别地，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 为 $D$ 上的严格减函数.

单调递增函数的图象沿 $x$ 轴正向上升，如图 1-4 所示；单调递减函数的图象沿 $x$ 轴正向下降，如图 1-5 所示.

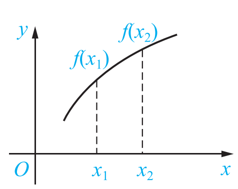


图 1-4

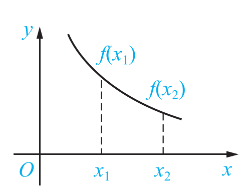


图 1-5

【例 4】 证明：$f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

【证明】 设 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2).$$

因为 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2>0$，$x_1-x_2<0$，所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

### 3. 有界性

**定义 4** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，数集 $X\subset D$. 若存在数 $K_1$，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有上界，而 $K_1$ 称为函数 $f(x)$在 $X$ 上的一个上界(任何大于 $K_1$ 的数也是 $f(x)$在 $X$ 上的上界)；若存在数 $K_2$，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有下界，而 $K_2$ 称为函数 $f(x)$在 $X$ 上的一个下界(任何小于 $K_2$ 的数也是 $f(x)$在 $X$ 上的下界)；若存在正数 $M$，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上有界；若这样的 $M$ 不存在，则称函数 $f(x)$在 $X$ 上无界，这就是说，如果对于任何正数 $M$，总存在 $x_1\in X$，使$|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$在 $X$ 上无界.

就函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内来说，数 1 是它的一个上界，数$-1$ 是它的一个下界(当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于$-1$ 的任何数也是它的下界). 即

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 $x$ 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是有界的. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 $M$ 而使$|f(x)|\leqslant M$ 成立).

### 4. 周期性

**定义 5** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，对于任意的 $x\in D$，存在不为零的数 $T$，使 $f(x+T)=f(x)$，那么 $f(x)$为 $D$ 上的周期函数，$T$ 称为函数的一个周期，并且 $nT$($n$ 为非零整数)也是它的周期. 通常，把函数的最小正周期称为函数的周期.

【例 5】 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象分别如图 1-6 和图 1-7 所示.

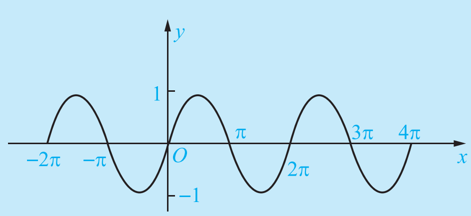


图 1-6

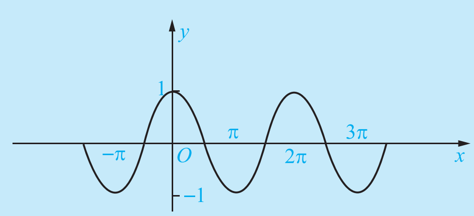


图 1-7

## 三、初等函数



### 1. 基本初等函数

通常，常数函数 $y=c$（$c$ 为常数）、幂函数 $y=x^{\alpha}$（$\alpha$ 为实数）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1,a$ 为常数）、对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1,a$ 为常数）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

### 2. 复合函数

**定义 6** 若函数 $y=f(u),u=g(x)$，且 $u=g(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域中，则变量 $y$ 通过变量 $u$ 与变量 $x$ 建立了对应关系，这个对应关系称为 $y$ 是 $x$ 的**复合函数**，$u$ 是**中间变量**，$x$ 是**自变量**，通常将

$$y=f(u),u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)].$$

例如，$y=\sin^2 x$ 就是由 $y=u^2,u=\sin x$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

同样地，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

**注 意**

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数；复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

**【例 6】** 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2 x$；　(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

**【解】** (1) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2,u=\cos x$ 复合而成的；

(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=x^2+2x$ 复合而成的.

**【例 7】** 设 $f(x)=x^2,g(x)=\log_2 x$，求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)]$.

**【解】**

$$f[g(x)]=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x;$$
$$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|;$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4.$$

### 3. 初等函数

**定义 7** 基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的加、减、乘、除（分母不为零）的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，叫作**初等函数**.

例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 是一个初等函数.

又如，函数 $y=x^x$，由于 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，因此

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

是由 $y=e^u$，$u=x\ln x$ 复合而成的函数，因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示，那么它就不是初等函数. 例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 就不是初等函数，这样的函数叫作**非初等函数**.

## 习题1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-10}$；　　(2) $y=\log_2\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{x-2}, & x<5,\\ \dfrac{1}{x-6}, & x\geqslant 5;\end{cases}$　　(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

2. 求下列函数的函数值.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+3}$，求 $f(-1)$，$f(5)$；

(2) $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求 $\operatorname{sgn} 2$，$\operatorname{sgn}(-1)$，$\operatorname{sgn} 0$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\cos x+3$；　　(2) $y=\lg(1+x)$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$；　　(4) $y=x^2+2x$.

4. 求下列函数的单调区间.

(1) $y=x^2-x$；　　(2) $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}\right)$；

(3) $y=2\log_4 x$；　　(4) $y=x^2+3x-18(x>-6)$.

5. 下列哪些函数是周期函数？如果是周期函数，指出其周期.

(1) $y=\sin(2x+3)$；　　(2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\cos 2x$；　　(4) $y=\tan\dfrac{x}{5}$.

6. 下列哪些函数是有界函数？

(1) $y=x^2(-1<x<2)$；　　(2) $y=\sin 2x$；

(3) $y=\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\log_2 x(x<1)$.

7. 设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=\ln x$，写出复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式.

8. 将下列复合函数拆开为几个简单函数.

(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;　　(2) $y=\ln\cos\frac{x}{2}$.

# 第二节 极限

## 一、数列的极限

前面已经学过数列的概念，现在来考察当项数 $n$ 无限增大时，无穷数列 $\{a_n\}$ 的变化趋势. 先看一个实例：一个篮球从距地面 1 m 高处自由下落，受地心引力及空气阻力作用，每次触地后篮球又反弹到前一次高度的 $\frac{1}{2}$ 处（见图 1-8）. 于是，可得到表示篮球高度的一个数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots. \tag{1-1}$$

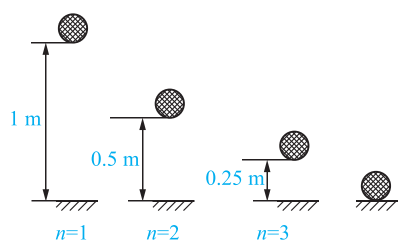


图 1-8

篮球最终会停在地面上，即反弹高度 $h=0$. 这说明，随着反弹次数 $n$ 的无限增大，数列通项 $h_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 的值将趋向于 0.

现在，再来看两个无穷数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots; \tag{1-2}$$

$$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n},\cdots. \tag{1-3}$$

为便于观察，在平面直角坐标系中作出数列(1-2)和(1-3)的图形，如图 1-9 和图 1-10 所示.

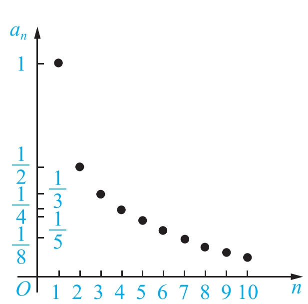

图 1-9

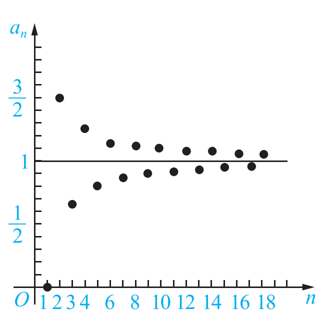

图 1-10

从图 1-9 中可看出，当 $n$ 增大时，点 $(n, a_n)$ 从横轴上方无限接近于直线 $a_n=0$. 这表明，当 $n$ 无限增大时，数列通项 $a_n=\dfrac{1}{n}$ 的值无限趋近于零.

同样，从图 1-10 中可看出，当 $n$ 增大时，点 $(n, a_n)$ 从上下两侧无限接近于直线 $a_n=1$. 这表明，当 $n$ 无限增大时，数列通项 $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ 的值无限趋近于常数 1.

上述数列的变化趋势具有相同的特点：当 $n$ 无限增大时，数列的项 $a_n$ 无限地趋近于某个常数 $A$.

**定义 1**　如果无穷数列 $\{a_n\}$ 的项数 $n$ 无限增大时，$a_n$ 无限趋近于一个确定的常数 $A$，那么 $A$ 就叫作**数列 $\{a_n\}$ 的极限**(limit). 记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \to A (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

读作“当 $n$ 趋向于无穷大时，数列 $\{a_n\}$ 的极限等于 $A$”.

根据定义，上面三个数列的极限分别记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;\lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

数列极限的定义

## 思政元素

战国时期，庄子提出“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，这便是早期极限思想的体现. 魏晋时期的数学家刘徽在“割圆术”中提出的“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”，更是中国古代极限观念的佳作. 众所周知，古希腊数学取得了非常高的成就，建立了严密的演绎体系. 然而，刘徽的“割圆术”却在人类历史上首次将极限和无穷小分割引入数学证明，成为人类文明史中不朽的篇章.

**【例 1】**　判断下面数列是否有极限，如果有，写出它的极限.

(1) $-2,-2,-2,\cdots,-2,\cdots$;

(2) $-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,(-1)^n\dfrac{1}{2^n},\cdots$;

(3) $1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$.

**【解】**　(1) 这个数列是常数数列，通项 $a_n=-2$，数列的极限是 $-2$，即

$$\lim_{n\to\infty}(-2)=-2.$$

(2) 这个数列是首项 $a_1=-\dfrac{1}{2}$，公比 $q=-\dfrac{1}{2}$ 的等比数列，通项是 $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$，可以看出，当 $n$ 无限增大时，$(-1)^n\dfrac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0.$$

(3) 当 $n$ 无限增大时，$a_n=n^2$ 也无限增大，不能趋近于一个确定的常数，因此，这个数列没有极限.

由此例，可得下面的结论：

$$\lim_{n\to\infty}C=C(C \text{ 为常数})$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$$

**注 意**

不是任何无穷数列都有极限.

如数列$\{2n\}$,当 $n$ 无限增大时,$2n$ 也无限增大,不能无限地趋近于一个确定的常数,因此这个数列没有极限.

又如数列$\{(-1)^n\}$,当 $n$ 无限增大时,$(-1)^n$ 在 1 与 −1 两个数上来回跳动,不能无限地趋近于一个确定的常数,因此这个数列也没有极限.

## 二、函数的极限

### 1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 2** 如果当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于确定的常数 $A$,那么 $A$ 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

**注 意**

这里"$x\to\infty$"表示 $x$ 既取正值而无限增大(记作 $x\to+\infty$),同时也取负值而绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$).但有的时候 $x$ 的变化趋势只能取这两种变化中的一种情况.

下面给出当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义.

**定义 3** 如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 $A$,那么 $A$ 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A, \text{或当 } x\to+\infty \text{ 时}, f(x)\to A$$

$$\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=A, \text{或当 } x\to-\infty \text{ 时}, f(x)\to A\right).$$

**【例 2】** 如图 1-11 所示,利用图象考察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

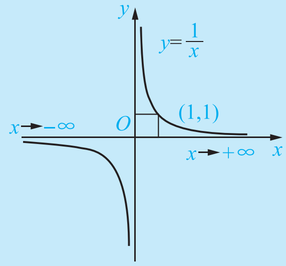


图 1-11

**【解】** 从图 1-11 中可以看出,当 $x$ 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 0.

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 显然地, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

### 2. 当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 4**　设函数 $y=f(x)$ 在 $x_0$ 的某空心邻域[①]内有定义，如果当 $x$ 无限趋近于 $x_0$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 $A$，那么 $A$ 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的**极限**，记作：

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A\text{，或当 } x \to x_0 \text{ 时，} f(x) \to A.$$

**【例 3】**　如图 1-12 所示，根据图象求 $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$ 的值.

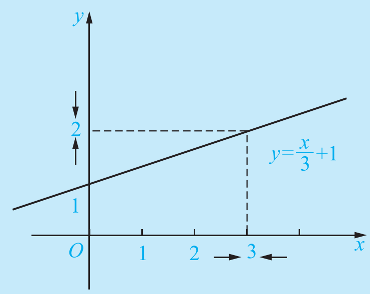


图 1-12

**【解】**　如图 1-12 所示，当 $x$ 从 3 的左侧无限趋近于 3 时，即 $x$ 取

$$2.9, 2.99, 2.999, \cdots \to 3$$

时，对应的函数 $f(x)$ 的值从

$$1.97, 1.997, 1.999\,7, \cdots \to 2.$$

当 $x$ 从 3 的右侧无限趋近于 3 时，即 $x$ 取

$$3.1, 3.01, 3.001, \cdots \to 3$$

时，对应的函数 $f(x)$ 的值从

$$2.03, 2.003, 2.000\,3, \cdots \to 2.$$

由此可知，当 $x \to 3$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{3}+1$ 的值无限趋近于 2. 即 $\lim\limits_{x \to 3}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)=2$.

**【例 4】**　考察极限 $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）.

**【解】**　把 $C$ 看作常数函数 $f(x)=C$，则当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 $C$. 因此有

$$\lim_{x \to x_0} C=C.$$

即常数的极限是它本身.

前面提到的 $x \to x_0$，是指 $x$ 以任意方式趋近于 $x_0$，但有的时候只需讨论从 $x_0$ 的左侧趋近于 $x_0$（$x \to x_0^-$）或从 $x_0$ 的右侧趋近于 $x_0$（$x \to x_0^+$）时的极限.

下面给出当 $x \to x_0^-$（$x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 的极限.

**定义 5**　如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 $A$，那么 $A$ 就称为函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处的**左极限**（left limit），记作

---

① $x_0$ 的邻域就是在数轴上满足 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$，$\delta>0$ 的点的集合，即区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内的一切实数. $x_0$ 称为邻域的中心，$\delta$ 为半径. 若这个区间不含点 $x_0$，则称为 $x_0$ 的空心 $\delta$ 邻域.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=A, f(x_0^-)=A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^-).$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$的值无限趋近于一个确定的常数 $A$，那么 $A$ 就称为函数$f(x)$在 $x_0$ 处的右极限(right limit)，记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)=A, f(x_0^+)=A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0^+).$$

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$的极限的定义和左右极限的定义，容易得到如下结论：

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x)=A \text{ 且 } \lim_{x \to x_0^+} f(x)=A.$$

【例 5】 若函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$ 求$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$，$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$和$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

【解】 作出这个分段函数的图象，如图 1-13 所示，可见函数 $f(x)$当 $x \to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x)=\lim_{x \to 0^-}(x-1)=-1,$$

右极限为

$$\lim_{x \to 0^+} f(x)=\lim_{x \to 0^+}(x+1)=1.$$

因为当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)$的左、右极限虽各自存在但不相等，所以$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在.

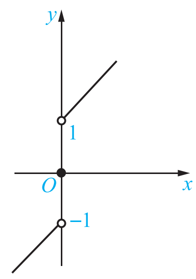

图 1-13

**注 意**

函数在点 $x_0$ 处的极限与函数在该点有没有定义无关.

## 习题1-2

1. 判断下面数列当 $n \to \infty$时是否有极限，如果有，写出它们的极限.

(1) $a_n=(-1)^n \dfrac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=\dfrac{n-2}{n+3}$；

(3) $a_n=\dfrac{n^3+n}{n^2-n}$；　　(4) $a_n=\sin \dfrac{n\pi}{2}$.

2. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n+1}{3n-1}$；　　(2) $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2}{n^3}-\dfrac{1}{n^2}+2\right)$；

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2-5}{2n^2+n}$；　　(4) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n+1}{8n^2-4n}$.

3. 分析下列函数的变化趋势，若极限存在，求出该极限.

(1) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$；　　(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3+1}$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

4. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{x}{2}$； (2) $\lim\limits_{x\to-3}(2x^2+1)$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$； (4) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x+1)$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant1,\\ \ln x, & x>1,\end{cases}$ 求当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的左右极限，并说明当 $x\to1$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在.

6. 说明下列极限不存在的理由.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}2^x$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

# 第三节 无穷小量与无穷大量

在研究函数的变化趋势时，发现两类特殊的函数：一是函数值无限趋向于零；二是函数的绝对值“无限变大”. 下面来研究这两种情形.

## 一、无穷小量

无穷小的概念

**定义 1** 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，当 $x\to0$ 时，$\sin x$ 是无穷小；当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小.

**注 意**

(1) 无穷小和绝对值很小的数是截然不同的. 例如，$10^{-10}$，$10^{-100}$ 都是很小的数，但不是无穷小. 只有零可以作为无穷小的唯一的常数，因为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}0=0$.

(2) 无穷小和自变量的变化趋势是密切相关的. 例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 为无穷小；当 $x\to1$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 就不是无穷小.

## 二、无穷大量

无穷大的概念

**定义 2** 如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷大量**，简称**无穷大**.

如果按函数极限的定义来看，$f(x)$ 的极限不存在，但是为了便于叙述，称