



高等职业教育公共课精品教材  
新时代课程思政建设配套教材

# 高等数学 (工科类)



王中兴 常安成 马凤丽 主编



北京出版集团  
北京出版社  
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:工科类/王中兴,常安成,马凤丽主编. —北京:北京  
出版社:北京教育出版社,2022.6  
ISBN 978-7-200-17258-4

I. ①高… II. ①王… ②常… ③马… III. ①高等数  
学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 118562 号

高等数学(工科类)

王中兴 常安成 马凤丽 主编

\*

北京出版集团  
北京出版社 出版  
北京教育出版社  
(北京北三环中路 6 号)  
邮政编码:100120

网址:www.bph.com.cn

京版北教文化传媒股份有限公司总发行

全国各地书店经销

北京盛通印刷股份有限公司印刷

\*

889 mm×1 194 mm 16 开本 17 印张 467 千字

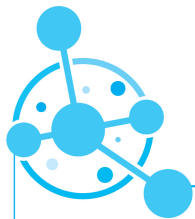
2022 年 6 月第 1 版 2022 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-17258-4

定价:52.00 元

版权所有 翻印必究

质量监督电话:(010)58572525 58572393 购书电话:(010)59812309



## PREFACE

# 前言



高职高专教育是高等教育不可或缺的一个重要组成部分. 高职高专教育的目标是培养社会需要的一线人才, 以适应经济迅速腾飞的我国对人才的需求.

高等数学是高职高专院校工科类专业必修的基础课. 作为一门学科, 数学有其固有的特点, 即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性. 抽象性是数学最基本、最显著的特点, 只有进行高度的抽象和统一, 才能深入地揭示事物的本质规律, 使之得到更广泛的应用. 严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中, 无论是概念和表述, 还是判断和推理, 都要运用逻辑的规则, 遵循思维的规律. 因此, 数学也是一种思维方法, 学习数学的过程就是进行思维训练的过程. 人类社会的进步, 与数学这门学科的广泛应用是分不开的. 尤其是到了现代, 计算机的出现和普及使得数学的应用领域大大拓宽, 现代数学正成为科技发展的强大动力.

本书是按照新形势下教材改革的精神, 遵循高职高专教育高等数学课程教学基本要求而编写的, 在编写的过程中力求体现以下几个特点.

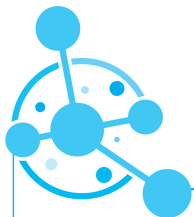
(1) 从高职高专教育的实际出发, 结合数学教学改革的实际经验, 按照“以应用为目的, 以必须够用为度”的原则, 以“理解基本概念, 掌握运算方法及应用”为目标, 删去了不必要的逻辑推导, 强化了基本概念的教学.

(2) 融合课程思政理念, 设计了“育人目标”“思政元素”“思政园地”等模块, 旨在坚定学生理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、增长知识见识、培养奋斗精神, 提升学生综合素质.

(3) 对数学理论的叙述更加通俗、易懂, 淡化了深奥的理论讲解, 强化了几何直观学习, 便于学生理解和掌握.

(4) 根据工科专业的教学需要, 优选了一些应用实例, 用大量的实例反映数学的应用, 加深学生对数学知识的理解.

(5) 为了方便教与学, 每节配有习题, 每章配有复习题, 书后附有参考答案.



本书共分为 10 章,包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程、线性代数和拉普拉斯变换.书后附有初等数学常用公式.

本书可作为高职高专院校工科类专业公共基础课教材,也可作为广大青年朋友学习的参考用书.

在本书的编写过程中,我们参阅了大量有关高等数学的书籍,并引用了其中的一些资料,在此向有关作者深表感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见,以便日后修订和完善.

编 者

# 目录

## 第一章

### 极限与连续

- 第一节 函数/2
- 第二节 极限的概念/7
- 第三节 无穷小量与无穷大量/13
- 第四节 极限的运算法则/15
- 第五节 两个重要极限/17
- 第六节 函数的连续性/19
- 复习题一/25

## 第二章

### 导数与微分

- 第一节 导数的概念/30
- 第二节 函数的求导法则/34
- 第三节 高阶导数/38
- 第四节 函数的微分/39
- 复习题二/44

## 第三章

### 中值定理与导数的应用

- 第一节 中值定理/48
- 第二节 洛必达法则/52
- 第三节 函数单调性的判定法/56
- 第四节 函数的极值及其求法/59
- 第五节 函数的最大值和最小值/63
- 第六节 曲线的凹凸性与拐点/66
- 第七节 函数图形的描绘/69
- 复习题三/71



S  
T  
H  
E  
N  
E  
N  
Z  
O  
O

#### 第四章

### 不定积分

- 第一节 不定积分的概念与性质/76
- 第二节 换元积分法/80
- 第三节 分部积分法/84
- 复习题四/86

#### 第五章

### 定积分及其应用

- 第一节 定积分的概念/90
- 第二节 微积分基本定理/96
- 第三节 定积分的计算/98
- 第四节 广义积分/101
- 第五节 定积分的应用/105
- 复习题五/109

#### 第六章

### 多元函数微积分

- 第一节 多元函数的基本概念/114
- 第二节 偏导数/118
- 第三节 全微分及其应用/121
- 第四节 多元复合函数和隐函数的求导法则/124
- 第五节 偏导数在几何上的应用/128
- 第六节 多元函数的极值/131
- 第七节 二重积分/134
- 复习题六/141

#### 第七章

### 无穷级数

- 第一节 常数项级数的概念和性质/146
- 第二节 正项级数/149
- 第三节 任意项级数/152
- 第四节 幂级数/154



S  
T  
H  
E  
N  
E  
T  
H  
O  
N

第八章

- 第五节 函数展开成幂级数/159
- 复习题七/164

常微分方程

- 第一节 微分方程的基本概念/170
- 第二节 一阶微分方程/172
- 第三节 可降阶的高阶微分方程/177
- 第四节 二阶常系数线性微分方程/181
- 复习题八/188

第九章

线性代数

- 第一节 行列式/192
- 第二节 矩阵及其运算/200
- 第三节 矩阵的秩和矩阵初等变换/209
- 第四节 高斯消元法及相容性定理/213
- 第五节 线性方程组解的结构/219
- 复习题九/224

第十章

拉普拉斯变换

- 第一节 拉氏变换的基本概念/230
- 第二节 拉氏变换的性质/232
- 第三节 拉氏变换的逆运算/235
- 第四节 拉氏变换应用举例/236
- 复习题十/238

参考答案

附录

初等数学常用公式

参考文献





# 第一章 极限与连续



## 育人目标

- ◎ 从中国古代极限理论取得的成就中挖掘民族自豪感,体会不忘初心、砥砺前行、坚持不懈、无限接近、方得始终的精神。
- ◎ 了解函数的概念,理解世间万物都是变化的,树立正确的世界观和方法论,用联系的普遍性来看待函数中两个变量间相互依存的关系。



## 本章导读

在解决一些实际问题时,需要研究变量的变化趋势.例如,当自变量无限接近于某个常数时,函数无限接近于什么?这就需要极限理论.极限理论是微积分学的基本推理工具,微积分学中的很多概念和定理都是用极限方法推导出来的.本章将主要介绍极限与连续的基本概念以及它们的一些性质,为进一步学好微积分打下基础.



# 第一节 函数

## 一、函数的概念

### 1. 函数的定义

**定义 1** 设  $D$  是由数组成的集合. 如果对于每个数  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定的对应法则  $f$  总有唯一的数值和它对应, 那么将对应法则  $f$  称为在  $D$  上  $x$  到  $y$  的一个**函数**, 记作  $y=f(x)$ ,  $x$  称为**自变量**,  $y$  称为**因变量**,  $D$  称为函数的**定义域**.

当  $x$  取  $x_0 \in D$  时, 与  $x_0$  对应的  $y$  的数值称为函数在点  $x_0$  处的**函数值**, 记作  $f(x_0)$ . 当  $x$  取遍  $D$  中的一切数时, 对应的函数值集合  $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$  称为函数的**值域**.

在函数的定义中, 如果对于每一个  $x \in D$ , 都有唯一的  $y$  与它对应, 那么这种函数称为**单值函数**; 若同一个  $x$  值可以对应多于一个的  $y$  值, 那么这种函数称为**多值函数**. 例如, 由方程  $x^2+y^2=9$  所确定的以  $x$  为自变量的函数  $y=\pm\sqrt{9-x^2}$  是一个多值函数, 而它的每一个“分支” $y=\sqrt{9-x^2}$  或  $y=-\sqrt{9-x^2}$  都是单值函数. 以后如果没有特别说明, 所说的函数都是指单值函数.

### 2. 函数的表示法

#### (1) 表格法

将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法, 如三角函数表、常用对数表及经济分析中的各种统计报表等.

#### (2) 图象法

用图象表示两个变量函数关系的方法, 如图 1-1 所示.

#### (3) 解析法

用一个等式表示两个变量的函数关系的方法, 如  $y=x+3$ ,  $y=\lg(x+2)$  等.

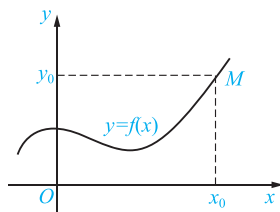


图 1-1

### 3. 函数的定义域

在实际问题中, 函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义, 而仅就抽象的解析式来研究函数时, 这时定义域就取使解析式有意义的自变量的全体. 要使解析式有意义, 通常考虑以下几点:

- (1) 分式的分母不能为零;
- (2) 偶次根式的被开方数必须为非负数;
- (3) 对数式中的真数必须大于零;
- (4) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域;
- (5) 若函数表达式由几个数学式子组成, 则其定义域应取各部分定义域的交集;
- (6) 分段函数的定义域是各个定义区间的并集.



**【例 1】** 设  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0, \\ 3, & 0 \leq x < 1, \\ \ln(2x-1), & x \geq 1, \end{cases}$  求  $f(-3), f\left(\frac{1}{3}\right), f(1+h)$ .

**【解】**  $f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2,$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3,$$

$$f(1+h) = \begin{cases} \sqrt{1-(1+h)}, & 1+h < 0, \\ 3, & 0 \leq 1+h < 1, \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h \geq 1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-h}, & h < -1, \\ 3, & -1 \leq h < 0, \\ \ln(1+2h), & h \geq 0. \end{cases}$$

**【例 2】** 求下列函数的定义域.

(1)  $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1};$  (2)  $y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

**【解】** (1) 若使函数有意义, 则  $x^2 + 2x + 1 \neq 0$ , 即  $(x+1)^2 \neq 0$ , 即  $x \neq -1$ . 所以函数的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ .

(2) 若使函数有意义, 则  $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0, \\ x^2-1 > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1, \end{cases}$  解得  $1 < x \leq 2$  或  $-2 \leq x < -1$ . 所以函数的定义域为  $[-2, -1) \cup (1, 2]$ .

## 二、函数的几种特性

### 1. 奇偶性

**定义 2** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对于任意的  $x_0 \in D, f(-x_0) = -f(x_0)$ , 那么  $f(x)$  为**奇函数**; 如果对于任意的  $x_0 \in D, f(-x_0) = f(x_0)$ , 那么  $f(x)$  为**偶函数**. 否则  $f(x)$  为非奇非偶函数.

奇函数的图象关于原点对称, 如图 1-2 所示; 偶函数的图象关于  $y$  轴对称, 如图 1-3 所示.

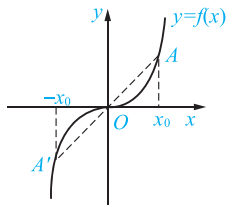


图 1-2

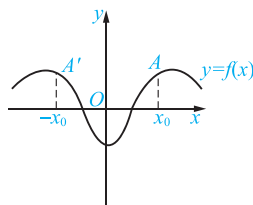


图 1-3



### 注意

在判断函数的奇偶性时, 一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称.



**【例 3】** 判断下列函数的奇偶性.

$$(1) f(x) = x^2; \quad (2) f(x) = 2\sin 2x;$$

$$(3) f(x) = \frac{1}{x-1}; \quad (4) f(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

**【解】** (1) 因为  $f(x)$  的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$  是关于原点对称的区间, 又因为对于任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ , 所以  $f(x) = x^2$  是偶函数.

(2) 因为  $f(x)$  的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$  是关于原点对称的区间, 又因为对于任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = 2\sin(-2x) = -2\sin 2x = -f(x)$ , 所以  $f(x) = 2\sin 2x$  是奇函数.

(3) 因为  $f(x)$  的定义域是  $D = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ , 定义域不关于原点对称, 所以  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  是非奇非偶函数.

(4) 因为  $f(x)$  的定义域  $D = (-\infty, +\infty)$  是关于原点对称的区间, 又因为对于任意的  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 都有  $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$ , 所以  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$  是偶函数.

## 2. 单调性

**定义 3** 若对于区间  $D$  内任意的两点  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ , 那么  $f(x)$  在区间  $D$  上单调增加, 区间  $D$  称为单调增区间; 特别地, 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  为  $D$  上的严格增函数. 如果恒有  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , 那么  $f(x)$  在区间  $D$  上单调减少, 区间  $D$  称为单调减区间; 特别地, 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则称  $f(x)$  为  $D$  上的严格减函数.

单调递增函数图象沿  $x$  轴正向上升, 如图 1-4 所示; 单调递减函数图象沿  $x$  轴正向下降, 如图 1-5 所示.

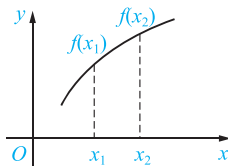


图 1-4

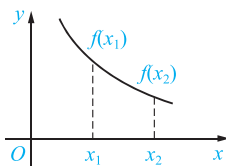


图 1-5

**【例 4】** 证明:  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递增函数.

**【证明】** 设  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

因为  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,  $x_1 < x_2$ , 所以

$$x_1 + x_2 > 0, x_1 - x_2 < 0.$$

所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递增函数.

## 3. 有界性

**定义 4** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \subset D$ . 如果存在数  $K_1$ , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有上界, 而  $K_1$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个上界 (任何大于  $K_1$  的数也是  $f(x)$  在  $X$  上的上界); 如果存在数  $K_2$ , 使得

$$f(x) \geq K_2$$



对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有下界, 而  $K_2$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个下界(任何小于  $K_2$  的数也是  $f(x)$  在  $X$  上的下界); 如果存在正数  $M$ , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界; 如果这样的  $M$  不存在, 就称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界; 这就是说, 如果对于任何正数  $M$ , 总存在  $x_1 \in X$ , 使  $|f(x_1)| > M$ , 那么函数  $f(x)$  在  $X$  上无界.

就函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界(当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又

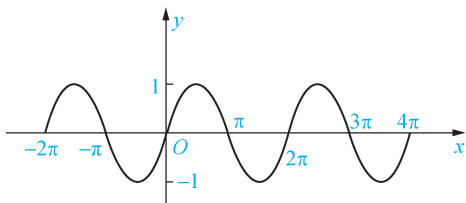
$$|\sin x| \leq 1$$

对任一实数  $x$  都成立, 故函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是有界的. 这里  $M=1$  (当然也可取大于 1 的任何数作为  $M$ , 而使  $|f(x)| \leq M$  成立).

#### 4. 周期性

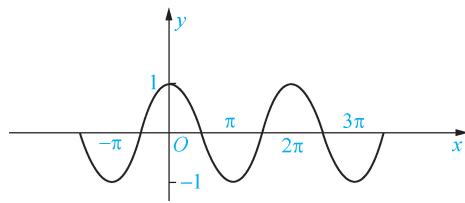
**定义 5** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ . 对于任意的  $x \in D$ , 存在不为零的数  $T$ , 使  $f(x+T) = f(x)$ , 那么  $f(x)$  为  $D$  上的周期函数.  $T$  称为函数的一个周期, 并且  $nT$  ( $n$  为非零整数) 也是它的周期. 通常, 把函数的最小正周期称为函数的周期.

函数  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数.  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  的图象分别如图 1-6 和图 1-7 所示.



函数  $y = \sin x$  的图象

图 1-6



函数  $y = \cos x$  的图象

图 1-7

### 三、初等函数

#### 1. 基本初等函数

常数函数  $y=c$  ( $c$  为常数)、幂函数  $y=x^a$  ( $a$  为实数)、指数函数  $y=a^x$  ( $a>0, a \neq 1, a$  为常数)、对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0, a \neq 1, a$  为常数)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

#### 2. 复合函数

**定义 6** 若函数  $y=f(u), u=g(x)$ , 且  $u=g(x)$  的值域或部分值域包含在  $f(u)$  的定义域中, 则变量  $y$  通过变量  $u$  与变量  $x$  建立了对应关系, 这个对应关系称  $y$  是  $x$  的**复合函数**,  $u$  是**中间变量**,  $x$  是**自变量**, 通常将

$$y=f(u), u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)].$$

例如,  $y=\sin^2 x$  就是由  $y=u^2, u=\sin x$  复合而成的, 这个复合函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 它也是  $u=\sin x$  的定义域.





同样地,  $y = \sqrt{1-x^2}$  是由  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = 1-x^2$  复合而成的, 这个复合函数的定义域为  $[-1, 1]$ , 它只是  $u = 1-x^2$  的定义域  $(-\infty, +\infty)$  的一部分.

**注意**

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的; 复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

**【例 5】** 指出下列函数的复合过程.

$$(1) y = \cos^2 x;$$

$$(2) y = \sqrt{x^2 + 2x}.$$

**【解】** (1)  $y = \cos^2 x$  是由  $y = u^2$ ,  $u = \cos x$  复合而成的.

(2)  $y = \sqrt{x^2 + 2x}$  是由  $y = \sqrt{u}$ ,  $u = x^2 + 2x$  复合而成的.

**【例 6】** 设  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \log_2 x$ , 求  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ ,  $f[f(x)]$ .

**【解】**

$$f[g(x)] = (\log_2 x)^2 = \log_2^2 x;$$

$$g[f(x)] = \log_2 f(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 |x|;$$

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

**3. 初等函数**

**定义 7** 基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次的加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算, 以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 叫作**初等函数**.

例如, 函数  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$  是一个初等函数.

又如, 函数  $y = x^x$ , 由于  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ , 因此

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

是由  $y = e^u$ ,  $u = x \ln x$  复合而成的函数, 因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示, 那么它就不是初等函数. 例如, 函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$  就不是初等函数, 这样的函数叫作**非初等函数**.

**习题 1-1**

1. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{x^2 - 3x - 10};$$

$$(2) y = \log_2 \frac{1}{x+1};$$

$$(3) y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x < 5, \\ \frac{1}{x-6}, & x \geq 5; \end{cases}$$

$$(4) y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}.$$



2. 求下列函数的值.

(1)  $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x + 3}$ , 求  $f(-1), f(5)$ .

(2)  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$  求  $\operatorname{sgn} 2, \operatorname{sgn}(-1), \operatorname{sgn} 0$ .

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1)  $y = \cos x + 3$ ;      (2)  $y = \lg(1+x)$ ;      (3)  $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ;      (4)  $y = x^2 + 2x$ .

4. 求下列函数的单调区间.

(1)  $y = x^2 - x$ ;      (2)  $y = \sin x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ ;

(3)  $y = 2 \log_4 x$ ;      (4)  $y = x^2 + 3x - 18 (x > -6)$ .

5. 下列哪些函数是周期函数? 如果是周期函数, 请指出其周期.

(1)  $y = \sin(2x + 3)$ ;      (2)  $y = x \cos x$ ;      (3)  $y = \cos 2x$ ;      (4)  $y = \tan \frac{x}{5}$ .

6. 下列哪些函数是有界函数?

(1)  $y = x^2 (-1 < x < 2)$ ;      (2)  $y = \sin 2x$ ;

(3)  $y = \frac{1}{x}$ ;      (4)  $y = \log_2 x (x < 1)$ .

7. 设  $y = f(u) = \sqrt{u}, u = \varphi(x) = \ln x$ , 写出复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的表达式.

## 第二节 极限的概念

### 一、数列的极限

前面已经学过数列的概念, 思考当项数  $n$  无限增大时, 无穷数列  $\{a_n\}$  有怎样的变化趋势? 先看一个实例: 一个篮球从距地面 1 m 高处自由下落, 受地心引力及空气阻力作用, 每次触地后篮球又反弹到前一次高度的  $\frac{1}{2}$  处 (见图 1-8). 于是, 可得到表示篮球高度的一个数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \quad (1-1)$$

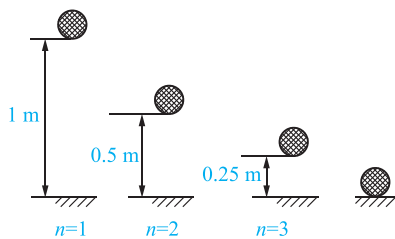


图 1-8



数列的极限



篮球最终会停在地面上,即反弹高度  $h=0$ ,这说明,随着反弹次数  $n$  的无限增大,数列通项  $h_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  的值将趋向于 0.

现在,再来看两个无穷数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots; \quad (1-2)$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \dots. \quad (1-3)$$

为便于观察,在平面直角坐标系中作出数列(1-2)和(1-3)的图形.从图 1-9 中可看出,当  $n$  增大时,点  $(n, a_n)$  从横轴上方无限接近于直线  $a_n=0$ .这表明,当  $n$  无限增大时,数列通项  $a_n = \frac{1}{n}$  的值无限趋近于零.

同样,从图 1-10 中可看出,当  $n$  增大时,点  $(n, a_n)$  从上下两侧无限接近于直线  $a_n=1$ .这表明,当  $n$  无限增大时,数列通项  $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$  的值无限趋近于常数 1.

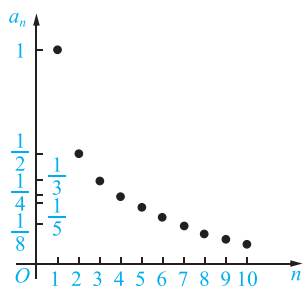


图 1-9

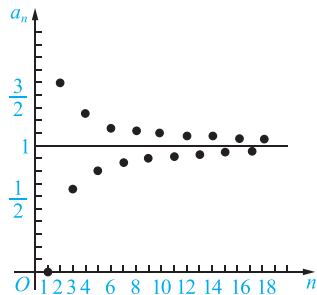


图 1-10

上述数列的变化趋势具有相同的特点:当  $n$  无限增大时,数列的项  $a_n$  无限地趋近于某个常数  $A$ .

**定义 1** 如果无穷数列  $\{a_n\}$  的项数  $n$  无限增大时,  $a_n$  无限趋近于一个确定的常数  $A$ ,那么  $A$  就叫作数列  $\{a_n\}$  的极限(limit). 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \rightarrow A \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

读作“当  $n$  趋向于无穷大时,数列  $\{a_n\}$  的极限等于  $A$ ”.

根据定义,上面三个数列的极限分别记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1.$$

**【例 1】** 判断下面数列是否有极限,如果有,写出它的极限.

- (1)  $-2, -2, -2, \dots, -2, \dots;$
- (2)  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots;$
- (3)  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots.$

**【解】** (1) 这个数列是常数数列,通项  $a_n = -2$ ,数列的极限是  $-2$ ,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2.$$

(2) 这个数列是公比  $q = -\frac{1}{2}$  的等比数列,通项是  $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ ,可以看出,当  $n$  无限增大时,  $(-1)^n \frac{1}{2^n}$





无限趋近于 0, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 0.$$

(3) 当  $n$  无限增大时,  $a_n = n^2$  也无限增大, 不能趋近于一个确定的常数, 因此, 这个数列没有极限. 由此例, 可得下面的结论:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} C &= C (C \text{ 为常数}); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} q^n &= 0 (|q| < 1). \end{aligned}$$



### 注意

不是任何无穷数列都有极限.

例如数列  $\{2n\}$ , 当  $n$  无限增大时,  $2n$  也无限增大, 不能无限地趋近于一个确定的常数, 因此这个数列没有极限.

又如数列  $\{(-1)^n\}$ , 当  $n$  无限增大时,  $(-1)^n$  在 1 与 -1 两个数上来回跳动, 不能无限地趋近于一个确定的常数, 因此这个数列也没有极限.



## 二、函数的极限



### 思政元素

战国时期, 庄子提出“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”, 这便是早期极限思想的体现. 魏晋时期的数学家刘徽在“割圆术”中提出的“割之弥细, 所失弥少, 割之又割, 以至于不可割, 则与圆合体, 而无所失矣”, 更是中国古代极限观念的佳作. 众所周知, 古希腊数学取得了非常高的成就, 建立了严密的演绎体系. 然而, 刘徽的“割圆术”却在人类历史上首次将极限和无穷小分割引入数学证明, 成为人类文明史中不朽的篇章.

#### 1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 2** 如果当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x)$  无限趋近于确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$



### 注意

这里“ $x \rightarrow \infty$ ”表示  $x$  既取正值而无限增大(记作  $x \rightarrow +\infty$ ), 同时也取负值而绝对值无限增大(记作  $x \rightarrow -\infty$ ). 但有的时候  $x$  的变化趋势只能取这两种变化中的一种情况.



下面给出当  $x \rightarrow +\infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时函数极限的定义.

**定义 3** 如果当  $x \rightarrow +\infty$  (或  $x \rightarrow -\infty$ ) 时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  (或  $x \rightarrow -\infty$ ) 时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ 或当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A, \text{ 或当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A \right)$$

**【例 2】** 如图 1-11 所示, 利用图象考察当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的变化趋势.

**【解】** 从图 1-11 中可以看出, 当  $x$  的绝对值无限增大时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于常数 0.

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ 显然, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

## 2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 4** 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  的某空心邻域<sup>①</sup>内有定义, 如果当  $x$  无限趋近于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无限趋近于常数  $A$ , 那么  $A$  就叫作函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \text{ 或当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$

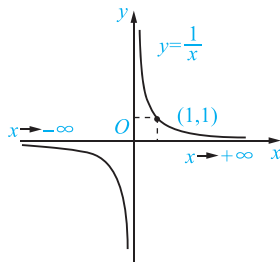


图 1-11

**【例 3】** 如图 1-12 所示, 根据图象求  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{3} + 1 \right)$  的值.

**【解】** 如图 1-12 所示, 当  $x$  从 3 的左侧无限趋近于 3 时, 即  $x$  取

$$2.9, 2.99, 2.999, \dots \rightarrow 3$$

时, 对应的函数  $f(x)$  的值从

$$1.97, 1.997, 1.9997, \dots \rightarrow 2.$$

当  $x$  从 3 的右侧无限趋近于 3 时, 即  $x$  取

$$3.1, 3.01, 3.001, \dots \rightarrow 3$$

时, 对应的函数  $f(x)$  的值从

$$2.03, 2.003, 2.0003, \dots \rightarrow 2.$$

由此可知, 当  $x \rightarrow 3$  时,  $f(x) = \frac{x}{3} + 1$  的值无限趋近于 2. 即

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{3} + 1 \right) = 2.$$

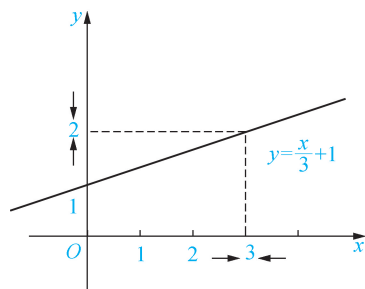


图 1-12

**【例 4】** 考察极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} C$  ( $C$  为常数).

**【解】** 把  $C$  看作常数函数  $f(x) = C$ , 则当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  的值恒等于  $C$ . 因此有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C,$$

<sup>①</sup>邻域就是在数轴上满足  $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ , 其中  $\delta > 0$  的点的集合. 即区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内的一切实数.  $x_0$  为邻域的中心,  $\delta$  为半径. 如果这个区间不含  $x_0$  点, 则称  $x_0$  的空心  $\delta$  邻域.



即常数的极限是它本身.

前面提到的  $x \rightarrow x_0$ , 是指  $x$  以任意方式趋近于  $x_0$ , 但有的时候只需讨论, 从  $x_0$  的左侧趋近于  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0^-$ ) 或从  $x_0$  的右侧趋近于  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0^+$ ) 时的极限.

下面给出当  $x \rightarrow x_0^-$  ( $x \rightarrow x_0^+$ ) 时, 函数  $f(x)$  的极限.

**定义 5** 如果当  $x \rightarrow x_0^-$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的**左极限**(left limit), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, f(x_0^-) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-).$$

如果当  $x \rightarrow x_0^+$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的**右极限**(right limit), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, f(x_0^+) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+).$$

根据  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限的定义和左右极限的定义, 容易得到以下结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

**【例 5】** 若函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$$

求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

**【解】** 作出这个分段函数的图象, 如图 1-13 所示, 可见函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow 0$  时的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1,$$

右极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1.$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x)$  的左、右极限虽各自存在但不相等, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

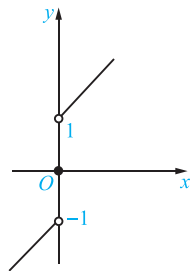


图 1-13



### 注意

函数在点  $x_0$  处的极限与函数在该点有没有定义无关.



## 习题1-2

1. 判断下面数列当  $n \rightarrow \infty$  时是否有极限, 如果有, 写出它们的极限.

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \frac{n-2}{n+3};$$

$$(3) a_n = \frac{n^3+n}{n^2-n};$$

$$(4) a_n = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

2. 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{3n-1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2 \right);$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-5}{2n^2+n};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{8n^2-4n}.$$

3. 分析下列函数的变化趋势, 若极限存在, 求出该极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}.$$

4. 求下列函数的极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -3} (2x^2+1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1).$$

5. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1, \end{cases}$  求当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  的左右极限, 并说明当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  的极限是否存在.

6. 说明下列极限不存在的理由.

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$$