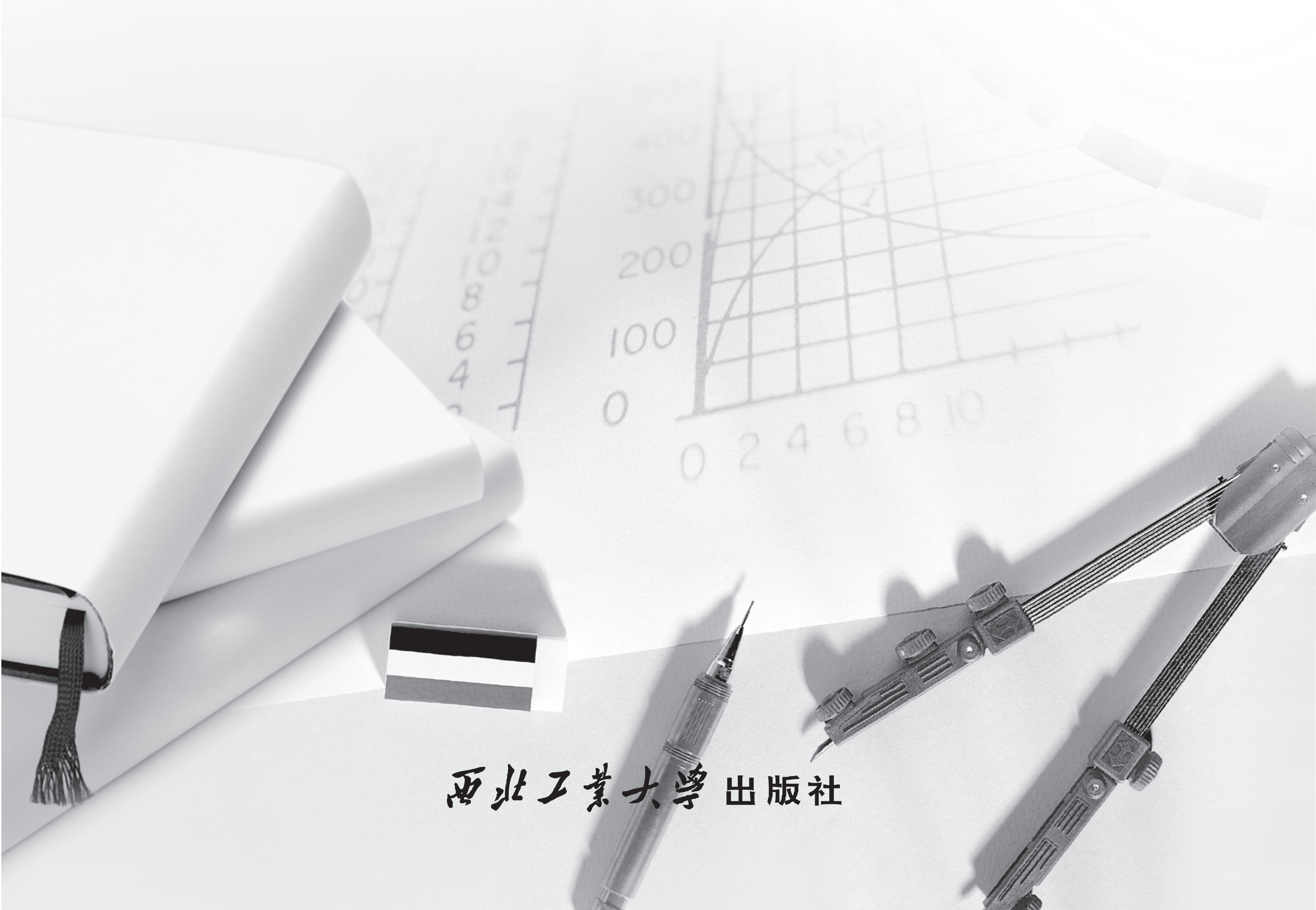
中等职业教育课程改革创新教材
中等职业教育创新教材审定委员会审定

数学

SHUXUE

基础模块
下 册

中等职业教育创新教材编委会编



西北工业大学出版社

【内容简介】　本书是根据教育部2009年最新颁布的《中等职业学校数学教学大纲》的要求编写的.本册分为5章.第6章为数列,第7章为平面向量(矢量),第8章为直线和圆的方程,第9章为立体几何,第10章为概率与统计初步.在内容编排上,突出了职业特色,贴近生活,贴近学生的实际情况,深入浅出,图文并茂,能够提高学生学习的兴趣.

本书可供各类中等职业学校作为教材使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学/中等职业教育创新教材编委会编.—西安:西北工业大学出版社,2009.11

ISBN 978-7-5612-2673-5

Ⅰ.数…　Ⅱ.中…　Ⅲ.数学课—专业学校—教材　Ⅳ.G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第205343号

出版发行:西北工业大学出版社

通信地址:西安市友谊西路127号　邮编:710072

电　　话:(029)88493844　88491757

网　　址:www.nwpup.com

印 刷 者:廊坊市广阳区九洲印刷厂

开　　本:787 mm×1092 mm　1/16

印　　张:44

字　　数:986千字

版　　次:2009年11月第1版　2014年9月第3次印刷

定　　价:115.00元(共5册)

本册定价:23.00元

本书编委会

主　编：姜　立　陈建富　何远仁

副主编：徐辽夏　朱维年　李武堂　赵崇辉

编　委：揭爱民　刘东升　向济南　徐和时

杨君君　卢晓燕　刘　静　巩秀娟

许向阳　孙丽静

前　言

为了适应中等职业教育教学改革新形势的要求，全面贯彻“以服务为宗旨，以就业为导向”的办学指导方针，体现“以就业为导向，以能力为本位”的课程体系，我们依据教育部2009年最新颁布的《中等职业学校数学教学大纲》的要求，遵循以促进学生发展为本、公共基础与多样化选择相结合、注重对学生能力培养、统一性与灵活性相结合的四项改革的基本原则，按照基础模块、职业模块和拓展模块的课程体系，结合中等职业学校学生实际，贴近社会、贴近职业，根据经济社会岗位对职业能力的发展需求，由文化基础课课程专家、教研实践经验丰富的职教教研员及教学一线的骨干教师共同编写了本套《中等职业学校文化基础课程教材》.

本书以传授知识、培养能力为目标，全面渗透新课程理念，从而形成以下鲜明的特色.

1. 教学理念新

(1)教材内容以服务教学为宗旨，使职业教育更好地担负起促进发展和促进就业这两个任务，力争做到教学内容与专业课的学习相衔接.

(2)教材内容注意与九年义务教育阶段数学课程的衔接，例如，在小节中穿插了“回忆时刻”，让学生回忆以前的内容，做好知识的整合.

(3)实施模块的、弹性的、多层次的教育，突破传统观念、传统模式、传统内容、传统方法，以适应学分制的课程体系的教学要求.

2. 突出职业特色

本套教材内容做了比较大的整合和调整，跳出“应试型”模式，强化与专业有关的内容，删去与专业无关的应试内容及传统的形式化的证明.

3. 通俗、实用、简单、易学，突出素质培养

(1)针对学生的心理特点、年龄特征及认知规律，教材采用讲清概念、淡化理论推导的策略，结合通俗易懂的语言，引人入胜.

(2)教材不在技巧和难度上做过高的要求，不在抽象问题、理论证明和形式化的术语上做过高的要求，把复杂的问题以简单的方式介绍出来.

4. 内容紧跟时代，注意激发兴趣，体现人文价值

(1)教材中安排了大量计算工具的使用知识，力争培养学生的计算技能、计算工具使用技能和数据处理技能.

(2)教材注重创设情境引入新课,例如,每节中安排了“情景导入”,激发学生兴趣,引出新课.

(3)教材中安排了“拓展阅读”,主要选取了一些数学史知识,让学生感受数学的魅力.

本教材为《数学(基础模块)》(下册),全书以实现教学大纲规定的教学目标为依据,结合中等职业学校学生的认知规律和心理特点来编排内容和设计体例.内容的选择突出了职业特色,贴近学生,贴近实际,贴近生活;内容的呈现形式多样化,图文并茂,能够充分调动学生学习的积极性.

本册总学时为68学时(不含复习考试环节),具体安排如下:

教学内容	学时安排
第6章　数列	10学时
第7章　平面向量(矢量)	10学时
第8章　直线和圆的方程	18学时
第9章　立体几何	14学时
第10章　概率与统计初步	16学时
合　　计	68学时

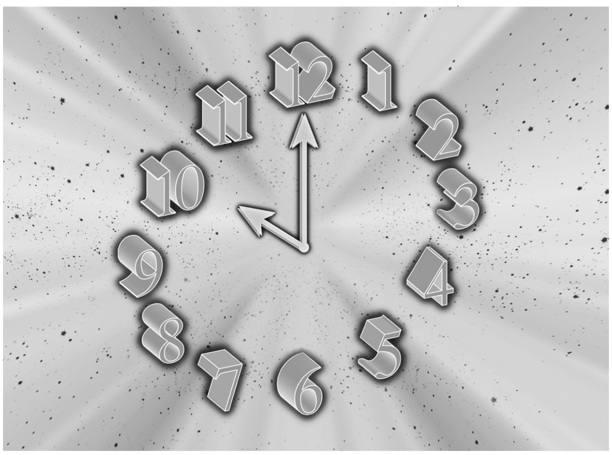
由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,欢迎从事职业教育的教师、专家和读者批评指正.

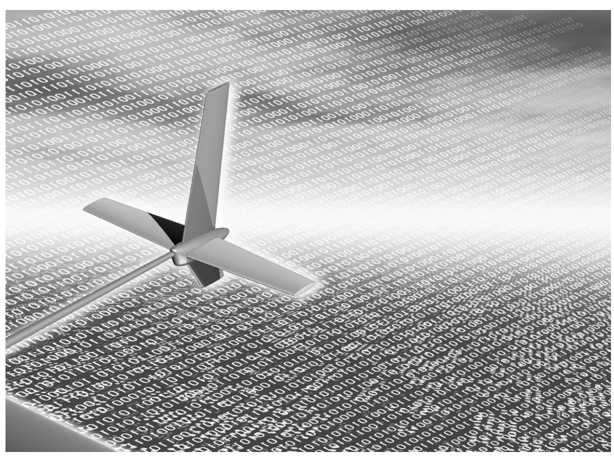
编　者

目　录

第 6 章

数　　列





什么是数列？一个数列中的各个数之间有什么内在规律？这些规律在实际生活中有哪些应用？本章将带你走进数列的世界，探讨这些问题.

6.1 数列的概念

◇ 情景导入

某场地堆放着一些圆钢(见图 6-1),最底层有 100 根,在其上一层(称为第二层)有 99 根,第三层有 98 根,依此类推.

问:(1) 第四层有多少根?

(2) 从第五层到第十层的圆钢数分别为多少?

图 6-1

◇ 知识探究

细胞一小时分裂一次,1 个细胞分裂一次变成 2 个,分裂两次变成 4 个,…,各次分裂后的细胞数排成一列数:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\cdots. \qquad (1)$$

自然数 1, 2, 3, 4, 5,…的倒数排成一列数:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots. \qquad (2)$$

−1 的 1 次幂,2 次幂,3 次幂,4 次幂,…排成一列数:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\cdots. \qquad (3)$$

"零存整取"存款,每月存入 500 元,每月存款数排成一列数:

$$500,\ 500,\ 500,\ 500,\cdots. \qquad (4)$$

思考时刻

你能举出数列的例子吗?

像上述例子中那样,按照一定次序排成的一列数,称为**数列**.

数列中的每一个数都叫作这个**数列的项**,其中第 1 个数为第 1 项,第 2 个数为第 2 项…第 n 个数为第 n 项,第 n 项中的"n"称为该项的序号.有有限多项的数列称为**有穷数列**.有无限多项的数列称为**无穷数列**.用项数 n 来表示该数列相应项的公式,叫作**数列的通项公式**.一个数列的第 n 项记作 $a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,第 n 项为 a_n 的数列记做 $\{a_n\}$.例如,数列(1) 的通项公式是 $a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

由数列通项公式的定义可知,数列的通项是以正整数集的子集为其定义域的函数.因此,通项可记做

$$a_n=f(n)(n\in A, A\subseteq\mathbf{N}^*).$$

像数列

$$b_{n+2}=b_{n+1}+b_n, n\in\mathbf{N}^*, 且\ b_1=1, b_2=1$$

这样，如果一个数列的第 n 项（$n\in\mathbf{N}^*$）能用它前面若干项来表示，则把这个公式称为这个数列的**递推公式**.

从第 2 项起，每一项都比前一项大，这样的数列叫作**递增数列**. 从第 2 项起，每一项都比前一项小，这样的数列叫作**递减数列**. 例如，数列(1)为递增数列；数列(2)为递减数列.

◇ 例题分析

例 1 根据通项公式，求出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项.

(1) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$；　　(2) $a_n=(-1)^n\cdot n$.

解 (1) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列的前 5 项为

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6}.$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5$，得到数列的前 5 项为

$$-1,2,-3,4,-5.$$

思考时刻

$(-1)^n$ 具有什么作用？

例 2 根据数列$\{a_n\}$的首项和递推关系写出数列的前 5 项，并推测通项公式.

(1) $a_1=0,a_{n+1}=a_n+(2n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$；　(2) $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

解 (1) 由已知 $a_1=0$，得

$$a_2=a_1+1=1,a_3=a_2+3=4,a_4=a_3+5=9,a_5=a_4+7=16.$$

由 $a_1=(1-1)^2,a_2=(2-1)^2,a_3=(3-1)^2,a_4=(4-1)^2,a_5=(5-1)^2$，可推测出

$$a_n=(n-1)^2.$$

(2) 由已知 $a_1=1$，得

$$a_2=\frac{2a_1}{a_1+2}=\frac{2}{3},a_3=\frac{2a_2}{a_2+2}=\frac{1}{2},a_4=\frac{2a_3}{a_3+2}=\frac{2}{5},a_5=\frac{2a_4}{a_4+2}=\frac{1}{3}.$$

由 $a_1=\dfrac{2}{1+1},a_2=\dfrac{2}{2+1},a_3=\dfrac{2}{3+1},a_4=\dfrac{2}{4+1},a_5=\dfrac{2}{5+1}$，可推测出

$$a_n=\frac{2}{n+1}.$$

注意

有些数列没有明显的通项公式，如数列 15，3，4，16，28，32.

•课堂练习•

1. 根据下列数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项.

(1) $a_n=5n$；　　(2) $a_n=n(n+1)$；

(3) $a_n=n^2$；　　(4) $a_n=(-1)^n$.

2.观察下面数列的特点,用适当的数填空,并写出每个数列的一个通项公式.

(1) 2,4,(　),16,32,(　),128;　　(2) $-1,\frac{1}{2}$,(　),$\frac{1}{4},-\frac{1}{5},\frac{1}{6}$,(　).

习题6.1

1.已知下列数列的通项公式,分别写出它们的前4项.

(1) $a_n=-2n+4$;　　(2) $a_n=5-n$;　　(3) $a_n=5^n$;

(4) $a_n=3\cdot 2^n$;　　(5) $a_n=\left(-\frac{1}{5}\right)^n$;　　(6) $a_n=n^4$.

2.根据下列数列的通项公式,分别写出它们的第7项与第10项.

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$;　　(2) $a_n=n(n+2)$;

(3) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$;　　(4) $a_n=-2^n+3$.

3.写出下列数列的一个通项公式,使它的前4项分别是下列各数.

(1) 2,4,6,8;　　(2) 3,3,3,3;

(3) $\frac{1}{1\times 2},\frac{1}{2\times 3},\frac{1}{3\times 4},\frac{1}{4\times 5}$;　　(4) $1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$.

4.写出下列数列的前5项.

(1) $a_1=1,a_{n+1}=a_n+3$;　　(2) $a_1=2,a_{n+1}=2a_n$;

(3) $a_1=3,a_2=6,a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$;　　(4) $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$.

5.已知数列$\{a_n\}$的递推公式为$a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}+a_n),n\in\mathbf{N}^*$,且$a_1=0,a_2=\frac{1}{2}$,写出这个数列的前6项.

6.2　等差数列

6.2.1　等差数列及其通项公式

◇ 情景导入

某班参加义务植树劳动,分为5个小组,第1小组到第5小组植树的棵数恰好构成下面的数列:

$$20,22,24,26,28.$$

在过去的 300 多年里,人们分别在下列时间里观测到了哈雷彗星,可以得到下面的数列:

1682,1758,1834,1910,1986.

2008 年,在北京举行的奥运会上,女子举重项目共设置了 7 个级别.其中较轻的 4 个级别体重构成下面的数列(单位:kg):

48,53,58,63.

试分析上述的 3 个数列有什么共同的特点.

◇ 知识探究

观察数列

20, 22, 24, 26, 28.

我们可以发现,这个数列有这样的特点:从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于 2.

观察数列

1682,1758,1834,1910,1986.

我们可以发现,这个数列有这样的特点:从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于 76.

观察数列

48,53,58,63.

我们可以发现,这个数列有这样的特点:从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于 5.

一般地,如果一个数列从它的第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一常数,则这个数列叫作**等差数列**,这个常数叫作等差数列的**公差**,通常用字母 d 来表示.

例如,数列

$$1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots$$

就是等差数列,它的公差 $d=2$.

特别地,数列

$$2, 2, 2, 2, \cdots$$

也是等差数列,它的公差为 0.公差为 0 的数列叫作**常数数列**.

如果一个数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

是等差数列,它的公差是 d,那么

$$a_2=a_1+d,$$

$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$

由此可知,如果已知首项和公差,则等差数列$\{a_n\}$的**通项公式**可表示为

$$a_n=a_1+(n-1)d.$$

◇ 例题分析

例 1 求等差数列

$$12,8,4,0,\cdots$$

的通项公式与第 10 项.

解 因为 $a_1=12, d=8-12=-4$,所以这个等差数列的通项公式为

$$a_n=12+(n-1)\times(-4),$$

即 $$a_n=16-4n.$$

从而 $$a_{10}=16-4\times10=-24.$$

思考时刻

只要知道了等差数列的任意两个相邻的项,就可以求出公差吗?

例 2 等差数列

$$-1,2,5,8,\cdots$$

的第几项是 152?

解 设这个等差数列的第 n 项是 152. 由于

$$a_1=-1, a_2=2, d=2-(-1)=3,$$

因此由通项公式得

$$152=-1+(n-1)\times3,$$

解得 $$n=52.$$

即这个数列的第 52 项是 152.

注意

等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 表示了首项为 a_1、公差为 d、项的序号 n 以及第 n 项 a_n 这 4 个量之间的关系. 只要知道了其中任意 3 个量,就可以求出另外一个量.

◇ 知识探究

在 a 与 b 两个数之间插入一个数 D,使得 a,D,b 成等差数列.

即 $$D-a=b-D$$

$$\Leftrightarrow D=\frac{a+b}{2}$$

$\Leftrightarrow D$ 是 a 与 b 的算术平均数.

一般地,如果 a,D,b 成等差数列,那么 D 称为 a 与 b 的**等差中项**. 从上述讨论看到,D 是 a 与 b 的等差中项当且仅当 D 是 a 与 b 的算术平均数.

在一个等差数列 $\{a_n\}$ 中,任取连续的 3 项,这 3 项当然是等差数列,因此中间项就是它的前一项与后一项的等差中项.

◇ 例题分析

例 3 已知 3 个数成等差数列，它们的和为 21，积为 168，求这 3 个数.

解 设这 3 个数分别为 $a-d, a, a+d$，则

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=21\\(a-d)a(a+d)=168\end{cases},$$

整理，得

$$\begin{cases}3a=21\\a(a^2-d^2)=168\end{cases}.$$

解得

$$a=7, d=\pm5.$$

因此所求的 3 个数为 2，7，12 或 12，7，2.

• 课堂练习 •

1.（1）求等差数列 3，7，11，…的第 4，7，10 项；

（2）求等差数列 10，8，6，…的第 20 项.

2. 求满足下列条件的等差数列的通项公式.

（1）$d=\frac{2}{3}, a_{10}=2$；（2）$a_1=1, a_8=48$.

3. 求下列各组数的等差中项.

（1）100 与 20；（2）-6 与 42.

6.2.2 等差数列的前 n 项和公式

◇ 情景导入

如图 6-2 所示，某剧场共有 20 排座位，第一排有 38 个座位，以后每一排都比前一排多 2 个座位. 某校一年级全体师生共 840 人要到该剧场举行联欢会，分析他们能否使用此剧场，你是如何分析的？

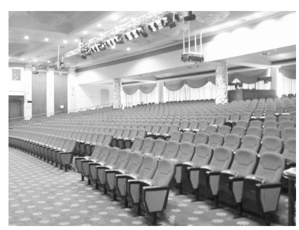


图 6-2

◇ 知识探究

数列的前 n 项和通常记做 S_n.

已知数列 $\{2n\}$，求它的前 100 项的和

$$S_{100}=2+4+6+\cdots+196+198+200. \quad (1)$$

将上式右边各项的次序反过来，S_{100} 又可写成

$$S_{100}=200+198+196+\cdots+6+4+2. \tag{2}$$

将(1)(2)两式上下对应项相加,我们发现其和都等于202,所以将(1)(2)两式的两边分别相加,得

$$2S_{100}=(2+200)\times100,$$

$$S_{100}=\frac{(2+200)\times100}{2},$$

$$S_{100}=10100.$$

一般地,$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$, (3)

再把各项次序反过来,S_n 又可写成

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d], \tag{4}$$

将(3)(4)两式两边分别相加,得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列**前 n 项和公式**

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}. \tag{5}$$

因为 $a_n=a_1+(n-1)d$,所以式(5)又可写成

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d. \tag{6}$$

注意

在式(5)(6)中,都涉及4个变量的关系,只要知道其中任意3个,就可以求出第4个.

◇ 例题分析

例 4 求前1000个正整数的和.

解 正整数从小到大排成一个等差数列,首项为1,第1000项为1000,从而前1000个正整数的和为

$$S_{1000}=\frac{1000\times(1+1000)}{2}=500500.$$

例 5 已知一个等差数列的首项 $a_1=-5$,公差 $d=3$,求它的前20项的和.

解 $$S_{20}=20\times(-5)+\frac{20\times(20-1)}{2}\times3=470.$$

例 6 等差数列

$$-1,\ 2,\ 5,\ 8,\cdots$$

的前多少项的和是125?

解 设这个数列的前 n 项和是125,由于 $a_1=-1$,$d=2-(-1)=3$,因此由式(6)得

$$-n+\frac{n(n-1)}{2}\times 3=125,$$

化简，得
$$3n^2-5n-250=0.$$

解得 $n_1=10$，$n_2=-\frac{25}{3}$（舍去）.

因此，等差数列的前 10 项的和是 125.

• 课堂练习 •

1. 求前 1500 个正整数的和.

2. 根据下列各题条件，求相应等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

（1）$a_1=5$，$a_n=95$，$n=10$；

（2）$a_1=100$，$d=-2$，$n=50$；

（3）$a_1=\frac{2}{3}$，$a_n=-\frac{3}{2}$，$n=14$；

（4）$a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$.

习题 6.2

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 $\frac{1}{3}$，以后各项由公式 $a_n=a_{n-1}+\frac{2}{3}$ 给出，$\{a_n\}$ 是等差数列吗？为什么？写出这个数列的前 5 项.

2. 写出等差数列

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ 1,\ \frac{7}{5},\ \cdots$$

的通项公式，并求此数列的第 11 项.

3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_{20}=18$，$d=-3$，求 a_{10}.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=5$，$a_4=9$，求 a_{30}.

5. 一个有穷等差数列共 20 项，各项之和为 1050，首项是 5，求公差与末项.

6. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_n=17$，$S_n=209$，求 n 与 d.

7. （1）在正整数集合中有多少个 3 位数？求它们的和；

（2）在 3 位正整数的集合中有多少个数是 7 的倍数？求它们的和；

（3）求等差数列 10，7，4，…，-47 的各项的和.

8. （1）设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=3n-2$，求它的前 n 项和公式；

（2）设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式是 $S_n=5n^2+3n$，求它的前 3 项，并求其通项公式.

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列及其通项公式

◇ 情景导入

一辆汽车的售价为 15 万元，年折旧率约为 10%，那么，该车今后 5 年的价值构成下面的一个数列(单位：万元)：

$$15\times0.9,15\times0.9^2,15\times0.9^3,15\times0.9^4,15\times0.9^5.$$

复利存款问题：月利率 5%，那么 1000 元存入银行，从第 1 个月后到第 12 个月后的本利和构成下面的一个数列(单位：元)：

$$1000\times1.05,1000\times1.05^2,1000\times1.05^3,\cdots,1000\times1.05^{12}.$$

某工厂今年的产值是 1000 万元，如果通过实行技术改造，在今后的 5 年内，每年都比上一年增加产值 10%，那么今后 5 年的产值构成下面的一个数列(单位：万元)：

$$1000\times1.1,1000\times1.1^2,1000\times1.1^3,1000\times1.1^4,1000\times1.1^5.$$

试分析上面的 3 个数列有什么共同的特点.

◇ 知识探究

观察数列

$$15\times0.9,15\times0.9^2,15\times0.9^3,15\times0.9^4,15\times0.9^5.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于常数 0.9.

观察数列

$$1000\times1.05,1000\times1.05^2,1000\times1.05^3,\cdots,1000\times1.05^{12}.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于常数 1.05.

观察数列

$$1000\times1.1,1000\times1.1^2,1000\times1.1^3,1000\times1.1^4,1000\times1.1^5.$$

这个数列有这样的特点：从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于常数 1.1.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的比都等于同一个常数，那么这个数列称为**等比数列**. 这个常数称为这个等比数列的**公比**，通常用字母 q 来表示. 由于 0 不能做分母，因此如果 $\{a_n\}$ 是等比数列，那么它的任何一项都不等于 0，从而公比 $q\neq0$.

因为在一个等比数列里，从第 2 项起每一项与它前一项的比都等于公比，所以每一项都等于它的前一项乘以公比. 这就是说，如果等比数列 $a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots$ 的公比是 q，那么

$a_2 = a_1 q,$

$a_3 = a_2 q = (a_1 q) q = a_1 q^2,$

$a_4 = a_3 q = (a_1 q^2) q = a_1 q^3,$

…

由此可知，等比数列$\{a_n\}$的**通项公式**是

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

从等比数列的通项公式看出，只要知道首项a_1和公比q，就可以求出等比数列的任何一项.

◇ 例题分析

例 1 求等比数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$$

的通项公式以及第 7 项、第 10 项.

思考时刻

只要知道了等比数列的任意两个相邻的项，就可以求出公比吗？

解 因为$a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$，所以这个等比数列的通项公式是

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

即
$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

于是
$$a_7 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}, a_{10} = \frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}.$$

例 2 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1 = 4, q = 2$. 试问：第几项是 1024？

解 设第n项是 1024，根据通项公式得

$$4 \cdot 2^{n-1} = 1024,$$

即
$$2^{n-1} = 256,$$

从而
$$n - 1 = 8,$$

因此
$$n = 9.$$

即这个等比数列的第 9 项是 1024.

◇ 知识探究

在两个数a与b之间插入一个数G，使得a, G, b成等比数列.

即
$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$$
$$\Leftrightarrow G^2 = ab$$
$$\Leftrightarrow G = \pm\sqrt{ab}.$$

一般地，如果a与b两个数之间插入一个数G，使a, G, b成等比数列，则G称为a与b

的等比中项.

从上述推导过程看到，当 a 与 b 都是正实数时，它们的等比中项 G 等于这两个正实数的几何平均数或者几何平均数的相反数.

◇ 例题分析

例 3 求 -4 与 -7 的等比中项.

解 -4 与 -7 的等比中项为

$$G=\pm\sqrt{(-4)\times(-7)}=\pm 2\sqrt{7}.$$

例 4 已知 3 个数成等比数列，它们的和为 14，积为 -216，求这 3 个数.

解 设这 3 个数是 $\frac{a}{q}$，a，aq. 由已知条件得

$$\begin{cases}\dfrac{a}{q}+a+aq=14\\ \dfrac{a}{q}\cdot a\cdot aq=-216\end{cases}.$$

由第二个方程，得 $a^3=-216$，所以 $a=-6$. 代入第一个方程，得

$$-6\left(\frac{1}{q}+1+q\right)=14,$$

整理，得

$$3q^2+10q+3=0,$$

解得

$$q=-\frac{1}{3}\text{ 或 }q=-3.$$

从而所求的 3 个数为 $18,-6,2$ 或 $2,-6,18$.

• 课堂练习 •

1. 求下列等比数列的第 5 项与第 10 项.

(1) $5,-15,45,\cdots$； (2) $2,4,8,16,\cdots$；

(3) $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{8},\cdots$； (4) $\sqrt{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},\cdots$.

2. (1) 一个等比数列的第 9 项是 $\frac{4}{9}$，公比是 $-\frac{1}{3}$，求它的第 1 项；

(2) 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求它的第 1 项与第 4 项.

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-4$，公比 $q=\frac{3}{4}$，试问：它的第几项是 $-\frac{81}{64}$？

4. 求下列各对数的等比中项.

(1) 2 与 8； (2) 16 与 4.

6.3.2 等比数列的前 n 项和公式

◇ 情景导入

假如你是经销商，一位供货商提出要与你签订一份交易合同，合同的期限为 30 天，他每天给你提供价值 10 万元的商品，而你第一天只需付给他 1 分钱的货款，第二天付给他 2 分钱的货款，第三天付给他 4 分钱的货款，依此类推，以后每天所付的货款都是前一天所付货款的 2 倍. 你是否同意签这份合同呢?

◇ 知识探究

根据等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可以写成

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \tag{1}$$

我们知道，把等比数列的任一项乘以公比，就可得到它后面相邻的一项. 现将式(1)的两边分别乘以公比 q，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n. \tag{2}$$

比较(1)(2) 两式，我们可看到式(1)的右边第 2 项到最后 1 项，与式(2)的右边第 1 项到倒数第 2 项完全相同. 于是将式(1)的两边分别减去式(2)的两边，可以消去相同的项，得到

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n,$$

从而得出 $q\neq1$ 时，等比数列 $\{a_n\}$ 的**前 n 项和公式**为

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq1). \tag{3}$$

因为

$$a_1q^n=(a_1q^{n-1})q=a_nq,$$

所以等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式还可写成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}. \tag{4}$$

如果等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=1$，则这个等比数列是

$$a_1,\ a_1,\ a_1,\ a_1,\ \cdots,$$

从而它的前 n 项和 $S_n=na_1$.

注意

求等比数列的前 n 项和，当已知 a_1,q,n 时，用公式(3)；当已知 a_1,q,a_n 时，用公式(4). 在这两个公式中，都涉及 4 个量之间的关系，只要知道其中任意 3 个，就可求出第 4 个.

◇ 例题分析

例 5 求等比数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\cdots$$

的前 10 项和.

解 因为 $a_1=1, q=\frac{1}{2}$,所以

$$S_{10}=\frac{1\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=2-2^{-9}=\frac{2^{10}-1}{2^9}=\frac{1023}{512}.$$

例 6 设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=2^{n-1}, n\in\mathbf{N}^*$. 求这个数列的前 n 项的和.

解 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{(n+1)-1}}{2^{n-1}}=2, n\in\mathbf{N}^*$,因此 $\{a_n\}$ 是一个等比数列,它的公比 $q=2$,首项 $a_1=1$. 从而它的前 n 项和为

$$S_n=\frac{1\cdot(1-2^n)}{1-2}=2^n-1,$$

即
$$1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

• 课堂练习 •

1. 根据下列各组条件,求相应等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

(1) $a_1=3, q=2, n=6$;

(2) $a_1=2, q=\frac{1}{2}, a_n=\frac{1}{16}$;

(3) $a_1=8, q=\frac{1}{2}, n=5$.

2. (1) 求等比数列 1,2,4,…从第 5 项到第 10 项的和;

(2) 求等比数列 $\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\cdots$ 从第 3 项到第 7 项的和.

3. 已知一个等比数列的前 5 项的和是 242,公比为 3,求它的第 5 项.

习题 6.3

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 $\frac{1}{5}$,以后各项由公式 $a_n=\frac{5}{2}a_{n-1}$ 给出,$\{a_n\}$ 是等比数列吗?为什么?写出这个数列的前 5 项.

2. 写出等比数列$\frac{8}{3}$，4，6，9，…的通项公式，并写出它的第 5 项到第 8 项.

3. 等比数列$\{a_n\}$的首项是 25，公比是$\frac{1}{5}$，写出它的通项公式，并求出其第 7 项.

4. 写出等比数列-12，6，-3，$\frac{3}{2}$，…的通项公式，并写出它的第 12 项.

5. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_6=\frac{7}{32}$，$q=\frac{1}{2}$，求 a_3.

6. 求下列各组数的等比中项.

(1) 12 与 3； (2) -4 与 -8.

7. 等比数列$\{a_n\}$的首项是 1，公比是-2，求其前 8 项的和 S_8.

8. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，$S_4=1$，求其前 8 项的和 S_8.

9. 已知等比数列$\{a_n\}$前 3 项的和是$\frac{9}{2}$，前 6 项的和是$\frac{14}{3}$，求首项 a_1 与公比 q.

10. 求通项公式为 $a_n=2^n+2n-1$ 的数列的前 n 项和.

6.4 数列的实际应用举例

◇ 情景导入

在科学研究与工农业生产中，经常会碰到等差数列和等比数列. 等差数列和等比数列的通项公式、前 n 项和公式在计数中起着重要作用.

◇ 例题分析

例 1 图 6-3 表示堆放的钢管，共堆了 6 层，求这堆钢管的数量.

解 由图 6-3 可知，每层放的钢管数构成等差数列$\{a_n\}$，其中

$$a_1=4,a_6=9,n=6,$$

所以

$$S_6=\frac{(4+9)\times 6}{2}=39.$$

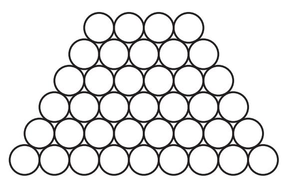


图 6-3

例 2 某企业 2008 年的生产利润为 5 万元，计划采用一项新技术，有望在今后 5 年使生产利润每年比上一年增长 20%，如果这一计划得以实现，那么该企业从 2008～2013 年的总利润是多少万元(结果保留到小数点后面两位)?

解 由于该企业计划在今后5年使生产利润每年比上一年增长20%，因此2008～2013年每年的生产利润组成的数列为

$$5, 5\times1.2, 5\times1.2^2, 5\times1.2^3, 5\times1.2^4, 5\times1.2^5.$$

这是一个等比数列，首项为5，公比为1.2，从而该企业2008～2013年的总利润是等比数列的前6项的和

$$S_6=\frac{5(1-1.2^6)}{1-1.2}=\frac{5(1.2^6-1)}{0.2}\approx49.65.$$

即总利润为49.65万元.

·课堂练习·

1. 下面是全国统一鞋号中成年女鞋的各种尺码(表示鞋底长，单位是cm)：

$$22,\quad 22\frac{1}{2},\quad 23,\quad 23\frac{1}{2},\quad 24,\quad 24\frac{1}{2},\quad 25$$

这些尺码是否构成等差数列？如果是，公差是多少？

2. 一个阶梯形教室，共有10排座位，从第二排起，每一排比前一排少2个座位，最后一排有22个座位.试问：这个教室有多少个座位？

3. 某林场计划第1年造林80公顷，以后每一年比前一年多造林20%，第5年造林多少公顷？

4. 某种细菌在培养过程中，每0.5 h分裂一次(1个分裂为2个)，经过4 h，1个细菌可繁殖多少个？

习题6.4

1. 安装在一根公共轴上的5个皮带轮的直径构成等差数列，且最大和最小的皮带轮的直径分别是216 mm与120 mm，求中间3个皮带轮的直径.

2. 一个多边形的各内角的度数成等差数列.最小的内角是100°，最大的内角是140°，求这个多边形的边数(提示：n边形的内角和是$(n-2)\times180°$，$n\geqslant3$).

3. 某租车公司提供的汽车每天租金350元，行驶每千米的附加费用为0.5元.某天老赵向该租车公司租了一辆车，行驶了200 km.试问：老赵应付给租车公司多少钱？

4. 某城市现有人口100万，如果人口的年自然增长率为1.2%，那么多少年后这个城市的人口将达到110万？

5. 某县2008年生产总值为12亿元，如果年增长率保持8%，那么该县从2009～2012年的生产总值的总和是多少(结果保留到小数点后3位)？

6. 抽气机的活塞每运动一次，从容器里抽出$\frac{1}{8}$的空气，因而使容器里的空气的压强降低为原

来的$\frac{7}{8}$.已知最初容器里的压强是 760 mm 汞柱,求活塞运动 5 次后,容器里空气的压强.

7.某工厂 2007 年生产一种产品 5 万台.如果年产量以 9%的速度增长,那么从 2007 年起到哪一年止可以使这种产品的总产量达到 37.6 万台?

本章小结与复习

【知识结构】

- 数列
  - 数列的概念
  - 等差数列
    - 定义
    - 通项公式
    - 前 n 项和公式
  - 等比数列
    - 定义
    - 通项公式
    - 前 n 项和公式
  - 数列的实际应用举例

【知识要点】

一、数列的概念

数列是按照一定次序排成的一列数. 如果我们能把一个数列的各项之间的内在规律搞清楚，那么我们就能抓住最重要的信息来把握整个数列. 数列的通项公式揭示了第 n 项 a_n 与项的序号 n 的关系. 如果能求出一个数列的通项公式 $a_n=f(n)$，那么我们就可以知道这个数列的任何一项.

二、等差数列

等差数列的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$；

前 n 项和公式为 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

三、等比数列

等比数列的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}$；

前 n 项和公式为 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq1)$，$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\ (q\neq1)$.

四、数列的实际应用举例

现实生活中许多实际问题都与数列有关系，尤其是等差数列和等比数列的通项公式和前 n 项和公式在实际生活中有着广泛的应用.

复习题 6

A 组

1. 填空题.

(1) 数列 0，3，8，15，24，…的一个通项公式是________；

(2) 已知数列$\{a_n\}$有通项公式 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}(n\geqslant 3)$，且 $a_1=1$，$a_2=1$，则 $a_5=$________；

(3) 通项公式为 $a_n=(-1)^{n+1}\cdot 2+n$ 的数列的第 10 项是________；

(4) 通项公式为 $a_n=(n+1)^2-2$ 的数列的前 6 项的和是________；

(5) 已知 3 个连续整数的和为 54，则这 3 个数分别是________；

(6) 已知 2 与 x 的等比中项为 12，则 $x=$________.

2. 在等差数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_1=2$,$a_{12}=34$,求公差 d；

(2) 已知 $a_1=-2$,$d=5$,$a_n=103$,求 n 与 S_n.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知 $a_5=\frac{3}{4}$,$q=\frac{1}{2}$,求 S_7；

(2) 已知 $a_2=2$,$a_5=54$,求 a_4.

4. 求下列两数的等差中项.

(1) -5 与 250；　　(2) $(a+b)^2$ 与$(a-b)^2$.

5. 求下列两数的等比中项.

(1) 5 与 45；　　(2) $a+b$ 与 $a-b$.

6. 写出下列数列的第 5 项.

(1) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=2a_{n+1}+a_n$；

(2) $a_1=-1$，$a_2=-2$，$a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_n}$.

7. 数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=7n-5$,$n\in \mathbf{N}^*$,试问:$\{a_n\}$是不是等差数列？如果是,它的首项与公差各是多少？

8. 已知 3 个数 a,b,c 成等比数列,求证:$\lg a$,$\lg b$,$\lg c$ 成等差数列.($a>0$,$b>0$,$c>0$)

9. 某城市现有人口总数为 200 万,如果人口的年自然增长率控制在 1%,试问:10 年后该市的人口将达到多少(结果保留到小数点后两位)？

10. 在通常情况下,从地面到 10 km 的高空,高度每增加 1 km,气温就下降一固定数值,如果 1 km高度的气温是 8.5℃,5 km 高度的气温是-17.5℃,求 2 km 和 6 km 高度的气温.

B 组

1. 一个屋顶的某一斜面成等腰梯形，最上面一层铺了21块瓦片，往下每一层比上一层多铺1块，斜面上铺了19层瓦片，问：共铺瓦片多少块？
2. 某人在银行参加每月10元的零存整取储蓄，月利率是按单利0.5%计算，问：12个月的本利合计是多少(单利是指如果储蓄时间超过单位时间，利息不计入本金，即对上一单位时间给予的利息不再支付利息)？

拓展阅读

斐波那契数与递推关系

斐波那契是意大利13世纪的数学家，全名是L·斐波那契(Leonardo Fibonacci，1175—1250)，他出生在比萨.

他的父亲是北非阿尔及利亚的一个海关征税员，为了做生意的需要，他请了一个教师来教他的儿子，特别学习当时比罗马记数法还先进的“印度-阿拉伯数字记数法”以及东方的乘除计算法，因此斐波那契小时候就接触了东方的数学.


斐波那契

他长大后也成了一个商人，为了做生意他走过了埃及、西西里、希腊和叙利亚，并且对东方数学颇感兴趣. 在1202年他写了一本名叫《Liber Abaci》的数学书，书里介绍了“印度-阿拉伯数字记数法”，还有一些代数问题和几何问题.

书里有一个“兔子问题”. 有个人把一对小兔子(一雄一雌)放在农场里，假定每个月一对成年兔子(一雄一雌)生下另外一对小兔子(一雄一雌). 而这新的一对兔子在二个月后就生下另外一对(一雄一雌)兔子，一年后这个农场有多少对兔子?

这本来是一个算术问题，但是却不能用普通的算术公式算出来. 我们不妨用符号A表示一对成年的兔子，B表示一对新出生的兔子.

如果知道这个月的繁殖情况，根据下表中的规律很容易得到下个月的繁殖情况，只需把这个月里的A改写成A、B，而这个月的B改写成A(表示新生小兔子已成长为成年兔子). 你可以自己试试填写下来.

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
兔数/对	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

因此在年底应该有144对兔子.

数学家后来就把这1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…的数列称为斐波那契数列，以纪念这个最先得到这个数列的数学家，而且用F_n来表示这数列的第n项.

这个数列有这样的性质：在1之后的每一项是前面两项的和，即$F_1=1$，$F_2=1$，

$F_n=F_{n-2}+F_{n-1}(n>2)$.

在数学上 $F_n=F_{n-2}+F_{n-1}(n>2)$称为斐波那契数列的递推公式，$F_1=1$，$F_2=1$ 叫作初始条件．理论上，知道一个数列的递推公式和初始条件，可以求出数列的任何一项．如等差数列的递推公式 $a_n=a_{n-1}+d$，等比数列的递推公式 $a_n=a_{n-1}\cdot q$.