中等职业学校公共基础课程配套教学用书

数学导学与同步练习

基础模块（下册）

主编　李柏清

汕頭大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学导学与同步练习 ：基础模块．下册 / 李柏清主编．— 汕头 ：汕头大学出版社，2023.6

ISBN 978-7-5658-5033-2

Ⅰ．①数… Ⅱ．①李… Ⅲ．①数学课－中等专业学校－教学参考资料 Ⅳ．①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 097428 号

数学导学与同步练习 ：基础模块．下册 SHUXUE DAOXUE YU TONGBU LIANXI JICHU MOKUAI XIACE

主　　编：李柏清
责任编辑：邹　峰
责任技编：黄东生
封面设计：易　帅
出版发行：汕头大学出版社
　　　　　广东省汕头市大学路 243 号汕头大学校园内　邮政编码：515063
电　　话：0754-82904613
印　　刷：天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/16
印　　张：12
字　　数：256 千字
版　　次：2023 年 6 月第 1 版
印　　次：2023 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：34.00 元
ISBN 978-7-5658-5033-2

PREFACE

前　言

本书根据教育部制定的《中等职业学校数学课程标准(2020年版)》(以下简称《课程标准》)编写而成,旨在落实立德树人根本任务,发展素质教育,帮助学生获得数学基础知识和基本技能、掌握基本数学思想、积累基本数学活动经验、形成理性思维和科学精神.

本书是与中等职业学校公共基础课程教材《数学　基础模块(下册)》配套的练习册.全书内容与教材对应,设置“知识梳理”“例题详解”“规律总结”“实战训练”等模块,融导学和课堂练习为一体.“例题详解”含每个例题的变式训练,用于考查学生举一反三、学以致用的能力.“实战训练”分为A组和B组,A组针对《课程标准》中学业质量水平一的要求而设置,以基础知识考查为主;B组针对《课程标准》中学业质量水平二的要求而设置,相对A组提升了一定难度.每章前提出“学习目标”,便于教师参考,也为学生的复习指明方向.每章配备一套测试卷,用于检测学生对本章知识的掌握程度.本书末还附有两套综合模拟测试卷,既可供学生全面总结、复习巩固使用,也可作为期末考试卷.

本书可供中等职业学校的学生使用.

本书在编写过程中,得到了相关教学研究专家的悉心指导和大力支持,在此一并表示感谢!由于编者水平有限,书中难免有不足之处,敬请广大读者批评指正,以便后续修订和完善.

编　者

CONTENTS

目 录

第 5 章　指数函数与对数函数

学习目标

1. 理解有理数指数幂的含义，掌握实数指数幂的运算法则.
2. 理解指数函数的概念和意义，掌握指数函数的单调性与特殊点.
3. 理解对数的概念及运算法则，掌握对数式与指数式的互化.
4. 掌握对数函数的概念、图像和性质.
5. 会利用函数型计算器计算有理数指数幂、常用对数和自然对数.
6. 能够运用指数函数、对数函数知识解决某些简单的实际应用问题.

5.1　实数指数幂

5.1.1　有理数指数幂

知识梳理

1. 根式的概念及性质

(1)n 次方根的概念：一般地，如果________，那么 x 叫作 a 的 n 次方根.

(2)n 次方根的性质：当 n 是奇数时，正数的 n 次方根是一个________，负数的 n 次方根是一个________，这时 a 的 n 次方根用符号________表示；当 n 是偶数时，正数的 n 次方根有两个，这两个数互为________，记为________，负数没有偶次方根；0 的任何次方根都是________，记作________.

(3)根式的概念：式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫作 a 的 n 次根式，其中 $n(n>1,n\in\mathbf{N}^*)$ 叫作________，a 叫作________.

(4)根式的性质.

①$\sqrt{a}$ 的双重非负性：$\begin{cases} a \underline{\qquad\qquad} 0, \\ \sqrt{a} \underline{\qquad\qquad} 0. \end{cases}$

②当 n 为任意正整数时，$(\sqrt[n]{a})^n=$________.

③当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=$________；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_, & a\geqslant 0,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_, & a<0.\end{cases}$

2.有理数指数幂的有关概念

(1)正整数指数幂：$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}a}=a^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)零指数幂：$a^0=$________$(a\neq 0)$.

(3)负整数指数幂：$a^{-n}=$________$(n\in\mathbf{N}^*,a\neq 0)$.

(4)分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=$________$(m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1)$；$a^{-\frac{m}{n}}=$________$(m,n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n>1$，$a\neq 0)$.对于以上两个关系式，当 n 为奇数时，________；当 n 为偶数时，________.

例题详解

例 1　将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1)$7^{\frac{3}{4}}$；　　(2)$26^{\frac{4}{3}}$；　　(3)$a^{-\frac{2}{3}}(a\neq 0)$.

点拨　熟悉分数指数幂与根式的互化.

解析　(1)$7^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{7^3}$；(2)$26^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{26^4}$；(3)$a^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}(a\neq 0)$.

变式训练　下列等式不成立的是(　　).

A. $(\sqrt{a})^2=a$　　B. $(\sqrt[3]{a})^3=a$

C. $\sqrt[4]{(3-\pi)^4}=\pi-3$　　D. $\sqrt{a^2}=a$

例 2　化简：$\dfrac{\sqrt[4]{(3.14-\pi)^4}}{3.14-\pi}+\dfrac{\sqrt[5]{(a-b)^5}}{a-b}+\dfrac{\sqrt[6]{(\pi-\sqrt{10})^6}}{\pi-\sqrt{10}}$.

点拨　注意根式下运算式的符号.

解析　因为 $3.14<\pi<\sqrt{10}$，所以

$$\text{原式}=\frac{\pi-3.14}{3.14-\pi}+\frac{a-b}{a-b}+\frac{\sqrt{10}-\pi}{\pi-\sqrt{10}}=-1+1-1=-1.$$

变式训练　化简：$\sqrt[n]{(a-b)^n}+\sqrt[n]{(a+b)^n}(a<b<0,n>1,n\in\mathbf{N}^*)$.

规律总结

有理数指数幂记忆口诀：

非零数的零次幂，得数为 1 很容易；负数指数幂对倒数，反之亦然会成立；分数指数幂对根式，上下正好对里外.

实战训练

A组

1. 选择题.

(1)下列运算正确的是(　　).

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $2a^{-2} = \frac{1}{2a^2}$

C. $\sqrt[4]{a^4} = a$

D. $(-3a^2)^3 = -27a^6$

(2)将 $5^{\frac{2}{3}}$ 写成根式的形式，正确的是(　　).

A. $\sqrt[2]{5^3}$　　B. $\sqrt[3]{5^2}$　　C. $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$　　D. $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$

(3)若 $a>0$，且 $m,n\in\mathbf{R}$，则下列各式中不正确的是(　　).

A. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

B. $(a^n)^m = a^{mn}$

C. $a^m \div a^n = a^{\frac{m}{n}}$

D. $1 \div a^n = a^{0-n}$

(4)下列各式中正确的是(　　).

A. $-\sqrt{x} = (-x)^{\frac{1}{2}}(x\neq 0)$

B. $\sqrt[6]{x^2} = x^{\frac{1}{3}}$

C. $x^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{x^3}$

D. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^3}(x,y\neq 0)$

2. 把下列各根式转化成指数幂的形式.

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；　　(2) $\frac{2}{\sqrt[5]{a^3}}$；　　(3) $\sqrt{\frac{3}{10}}$；　　(4) $\sqrt[4]{2.4^5}$.

3.将下列各分数指数幂写成根式的形式.

(1)$5^{-\frac{3}{2}}$；　(2)$2.1^{\frac{2}{3}}$；　(3)$a^{-\frac{4}{7}}$；　(4)$a^{\frac{3}{5}}$.

4.利用计算器求下列各式的值(精确到0.001).

(1)$\frac{1}{\sqrt[3]{0.45^2}}$；　(2)$3^{-\frac{4}{5}}$；　(3)$5^{\frac{3}{4}}$.

5.求下列各式的值.

(1)$27^{\frac{2}{3}}$；　(2)$16^{-\frac{1}{2}}$；　(3)$\left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$；　(4)$\sqrt[4]{(3-\pi)^4}$.

B组

1.将下列根式与分数指数幂进行互化.

(1)$\sqrt{2\sqrt{2}}$；　(2)$\sqrt[3]{x^2}(x>0)$；　(3)$a^{\frac{2}{5}}$；　(4)$a^{-\frac{3}{2}}$.

2. 讨论当 x 取何值时，下列各式有意义.

(1) $\sqrt[6]{4-x^2}$；　　(2) $(x-2)^{-\frac{1}{3}}$；　　(3) $(2x+3)^0$.

3. 若 $3<a<4$，求 $\sqrt{(3-a)^2}+\sqrt[4]{(4-a)^4}$ 的值.

4. 设 $a,b>0$，且 $a^b=b^a$，证明：$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$.

5. 设 a,b 均为不等于 1 的正数，且 $a^x=b^y$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=0$，求 ab 的值.

5.1.2　实数指数幂

知识梳理

实数指数幂的运算法则：

(1)$a^m \cdot a^n=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{R})$；

(2)$a^m \div a^n=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{R})$；

(3)$(a^m)^n=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{R})$；

(4)$(ab)^m=$________$(a>0,b>0,m,n\in\mathbf{R})$；

(5)$\left(\frac{a}{b}\right)^m=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{R})$.

例题详解

例 1　对于任意实数 x,y，下列运算正确的是(　　).

A. $3^x+3^y=3^{x+y}$　　B. $3^x-3^y=3^{x-y}$　　C. $3^x\cdot 3^y=3^{xy}$　　D. $\frac{1}{3^x}=3^{-x}$

点拨　熟悉指数幂的运算法则.

解析　D

$3^x+3^y\neq 3^{x+y}$，选项 A 错误；$3^x-3^y\neq 3^{x-y}$，选项 B 错误；$3^x\cdot 3^y=3^{x+y}$，选项 C 错误；$\frac{1}{3^x}=3^{-x}$，选项 D 正确.

变式训练　计算：$\dfrac{(3^{\frac{3}{2}}\times 5^{-1}\times 2^3)^{-\frac{1}{3}}\times 5^{-\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[6]{3^{-1}\times 5^5}}$.

例 2　下列运算不正确的是(　　).

A. $e^{2x}=(e^x)^2$　　B. $\sqrt{x}\sqrt{y}=\sqrt{xy}$

C. $\sqrt[3]{(a-b)^3}=a-b$　　D. $\sqrt[8]{(3-\pi)^8}=3-\pi$

点拨　注意运算式的符号.

解析　D

因为 $3<\pi$，所以 $\sqrt[8]{(3-\pi)^8}=\pi-3$，故选 D.

变式训练　设 x_1,x_2 是方程 $2x^2+5x+2=0$ 的两个根，则 $\left(\frac{4}{9}\right)^{x_1+x_2}$ 的值为________.

规律总结

实数指数幂记忆口诀：

同底数幂相乘除，指数加减底不变，幂的乘方不能混，指数相乘底不变；积的幂乃幂的积，商的幂乃幂的商.

实战训练

A 组

1.用分数指数幂表示下列各式.

(1)$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[2]{a}$；　　(2)$a\sqrt{a}$；　　(3)$a^3\cdot\sqrt[3]{a^2}(a>0)$；　　(4)$\sqrt{a\sqrt{a}}$.

2.计算下列各式的值.

(1)$\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$；　　(2)$0.027^{\frac{2}{3}}$；　　(3)$\sqrt[4]{81\times\sqrt{9^{\frac{2}{3}}}}$；　　(4)$\sqrt[4]{25\sqrt{625}}$.

3.化简下列各式($a>0,b>0$).

(1)$\frac{2\sqrt[3]{a}\cdot3\sqrt[3]{b}}{4\sqrt[6]{ab}}$；　　(2)$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$；

(3)$\dfrac{3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}}{-2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{3}{4}}}$；　　(4)$(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{5}{6}})^{6}$.

4.利用计算器求下列各式的值(精确到 0.001).

(1)$5^{\sqrt{2}}$；　(2)$(-1.1)^{\frac{5}{7}}$；　(3)$\dfrac{1}{\sqrt[3]{1.03^{2}}}$；　(4)$0.2^{1.52}$.

5.若 $10^{x}=2$,$10^{y}=5$,求 10^{2x-y}的值.

B组

1.化简:$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{-a}$.

2. 计算：

(1) $\left(2\dfrac{3}{5}\right)^{0}+2^{-2}\cdot\left(2\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}-0.01^{0.5}$；

(2) $0.027^{-\frac{1}{3}}-\left(-\dfrac{1}{7}\right)^{-2}+256^{\frac{3}{4}}-3^{-1}+(\sqrt{3}+1)^{0}$；

(3) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}+(\sqrt[3]{12})^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{(\sqrt{3}-2)^{2}}$；

(4) $125^{\frac{2}{3}}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}-(-3)^{0}+\sqrt{(-3)^{2}}$.

3.解下列方程.

(1)$x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$；　　(2)$2x^{\frac{3}{4}}-9=7$.

4.已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=5$，求下列各式的值.

(1)$a+a^{-1}$；　　(2)$a^{2}+a^{-2}$；　　(3)$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$；　　(4)$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}$.

5.化简：$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})(-3a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}})\div\left(\frac{1}{3}a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{6}}\right)$.

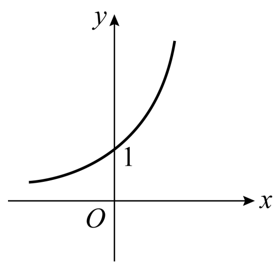
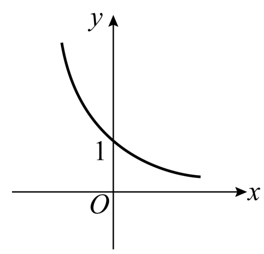
5.2　指数函数

知识梳理

1.指数函数的定义

一般地，形如________的函数叫作指数函数.其中，底数 a($a>0$ 且 $a\neq1$)为________，指数是自变量________.指数函数的定义域为________，值域为________.

2. 指数函数的图像和性质

a 的取值	$a>1$	$0<a<1$
图像		
定义域	**R**	**R**
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
单调性	在 **R** 上是________	在 **R** 上是________
奇偶性	非奇非偶函数	非奇非偶函数
定点	图像过点$(0,1)$， 即当 $x=0$ 时，$y=1$	图像过点$(0,1)$， 即当 $x=0$ 时，$y=1$
x 与 y 的变化	当 $x>0$ 时，________； 当 $x<0$ 时，________	当 $x>0$ 时，________； 当 $x<0$ 时，________

例题详解

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, x<0,\\ 2^x, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(0)=($　　$)$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

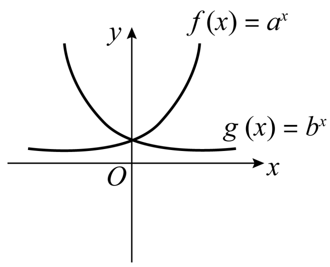
点拨　注意分定义域计算.

解析　B

$f(-2)+f(0)=2-2+2^0=1$.

变式训练　已知指数函数 $f(x)$ 的图像过点$(-2,4)$，求 $f(x)$ 及 $f(-1)$ 的值.

例 2　如图所示是指数函数 $f(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 与 $g(x)=b^x(b>0$ 且 $b\neq1)$ 在同一直角坐标系中的大致图像，则下列结论中正确的是（　　）.



A. $0<a<1<b$　　B. $0<b<1<a$　　C. $0<b<a<1$　　D. $1<b<a$

点拨　熟悉指数函数的图像和性质.

解析　B

由图像可知：$a>1$，$0<b<1$，故 B 选项正确.

变式训练　比较下列各组数的大小：

(1) $1.6^{-0.3}$ 与 $1.6^{-0.4}$；

(2) 0.2^{-2} 与 0.2^{3}；

(3) 0.5^{3} 与 $3^{0.5}$.

规律总结

同底数指数幂比较大小，直接根据对应指数函数的单调性进行判断；不同底数指数幂比较大小，往往借助中间量“1”来进行比较.

实战训练

A组

1. 选择题.

(1) 下列以 x 为自变量的函数中，是指数函数的是（　　）.

A. $y=-x^2$　　B. $y=-2^x$　　C. $y=(-2)^x$　　D. $y=2^x$

(2) 若指数函数 $y=(a-2)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，则 a 满足（　　）.

A. $0<a<1$　　B. $a>3$　　C. $2<a<3$　　D. $a>2$

(3)下列函数中,在 **R** 上为减函数的是(　　).

A. $y=3^x$　　B. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$　　C. $y=5^x$　　D. $y=\pi^x$

(4)下列函数中,在 **R** 上为增函数的是(　　).

A. $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$　　B. $y=x^2$　　C. $y=0.4^x$　　D. $y=(\sqrt{2})^x$

2.求下列函数的定义域.

(1)$y=2^{x-1}$;　　(2)$y=0.8^{\sqrt{x-1}}$;　　(3)$y=4^{\frac{1}{3x-1}}$.

3.比较下列各组中两个数值的大小.

(1)$1.6^{2.5}$与1.6^3;　　(2)$\left(\frac{2}{3}\right)^{1.5}$与$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1.3}$;

(3)$2.1^{\frac{4}{5}}$与$2.1^{\frac{2}{3}}$;　　(4)$\left(\frac{5}{3}\right)^{-0.2}$与$\left(\frac{5}{3}\right)^{-0.25}$.

4.利用指数函数的单调性,比较下列各式中 m,n 的大小.

(1)$4^m<4^n$;　　(2)$\left(\frac{1}{4}\right)^m<0.25^n$;　　(3)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-m}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$.

5.作出函数 $y=a^{|x|}(a>1)$的图像.

B组

1.已知函数 $f(x)=(a^2-4a+4)\cdot a^x$ 是指数函数,求 a 的值.

2.已知指数函数 $f(x)=a^x$ 的图像过点$\left(2,\dfrac{1}{16}\right)$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2)求 $f(1)$,$f(-2)$的值.

3.已知函数 $y_1=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x-1}$,$y_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3x}$,讨论当 x 为何值时,满足下列条件:

(1)$y_1>y_2$;　　(2)$y_1=y_2$;　　(3)$y_1<y_2$.