21世纪高等学校精品教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　编　黄加增　曾秀云
副主编　胡世录　陈媛媛

湖南大学出版社

21世纪高等学校精品教材

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　编　黄加增　曾秀云

副主编　胡世录　陈媛媛

湖南大学出版社·长沙

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/黄加增,曾秀云主编. —长沙:湖南大学出版社,2023.1

ISBN 978-7-5667-2824-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①黄… ②曾… Ⅲ.①概率论②数理统计 Ⅳ.①O21

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 015669 号

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULI TONGJI

主　　编:黄加增　曾秀云

责任编辑:金红艳

印　　装:天津市蓟县宏图印务有限公司

开　　本:787 mm×1092 mm　1/16　**印　　张**:12　**字　　数**:278 千字

版　　次:2023 年 1 月第 1 版　**印　　次**:2023 年 1 月第 1 次印刷

书　　号:ISBN 978-7-5667-2824-1

定　　价:49.00 元

出 版 人:李文邦

出版发行:湖南大学出版社

社　　址:湖南・长沙・岳麓山　**邮　　编**:410082

电　　话:0731-88822559(营销部),88821343(编辑室),88821006(出版部)

传　　真:0731-88822264(总编室)

网　　址:http://www.hnupress.com

电子邮箱:549334729@qq.com

前　言

为了适应和满足应用型本科教育快速发展的需要，本书编者经过长期调研，根据人才培养目标及要求，遵循应用型本科教育教学特点，针对学生的实际情况，结合教学实践，编写了本书.

在编写的过程中，编者力求体现以下几个特点：

(1)从教育实际出发，结合数学教学改革的实际经验，以“理解基本概念，掌握运算方法及应用”为依据，删减了不必要的逻辑推导，强化了基本概念的教学.

(2)在教材体系和章节的安排上，严格遵循循序渐进、深入浅出的教学规律；适当降低专业深度、拓宽基础面，且不是盲目将内容加深、加多，而是做到深浅适中、难易适度.

(3)考虑到有些专业课程具有较强的社会实践性，在本教材的编写上也力争做到理论联系实际，注重案例的引入. 通过案例教学，对课程重点和难点进行深化分析和训练，加强学生对知识点的理解和记忆，强化学生分析问题、解决问题的能力.

(4)内容叙述的组织方式易于被学生接受，重视对数学概念的分析，加强知识的探索过程；对得到的重要结论阐明它们在实际中直接和间接的作用.

(5)书后附有习题参考答案以及标准正态分布函数表、χ^2 分布表、t 分布上侧分位数表、F 分布表和泊松分布表.

概率论与数理统计是研究随机现象数量规律性及其应用的一门数学学科，是高等学校一门重要的基础理论课. 通过本课程的教学，使学生掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论及相应的处理随机事件的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力，为后续课程的学习以及从事工程技术工作和科研工作打下必要的概率统计理论基础.

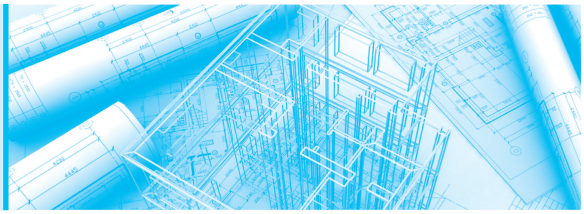
在本书的编写过程中，我们参阅了大量的有关概率论与数理统计等方面的书籍，并引用了其中的一些资料，在此向作者深表感谢.

由于作者水平有限，编写时间仓促，书中难免存在不足之处，敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见，以便修订时改正.

编　者

2023 年 1 月

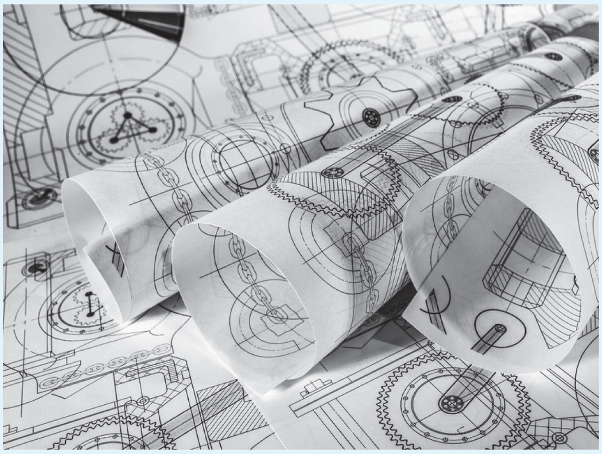
目　录



Contents

Contents

第一章



随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象（随机现象）规律性的一门应用数学学科.20世纪以来，广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章将主要介绍随机事件、随机事件间的关系及运算、随机事件的概率等内容.

第一节　随机事件

1. 随机现象

在自然界和人类社会存在着两类现象：一类称为确定性现象，即条件完全决定结果的现象，如在标准大气压下，水被加热到100℃时一定沸腾；另一类称为随机现象，即条件不能完全决定结果的现象. 如掷一枚均匀的硬币，可能出现正面朝上，也可能出现反面朝上.

对于随机现象，在少数几次观察或试验中其结果无规律性，但通过长期观察或大量的重复试验可以看出试验的结果呈现出一种规律性，这种规律性被称为**统计规律性**，它是随机现象自身所具有的特征. 概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，它被广泛应用于自然科学、社会科学的许多领域.

2. 随机试验

为了深入研究随机现象，就必须在一定的条件下对它进行多次观察. 若把一次观察视为一次试验，观测到的结果就是试验结果. 概率论中把满足下列特点的试验称为**随机试验**.

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)有多种可能结果，且知道试验可能出现的全部结果；

(3)试验前不能预言会出现哪种结果.

若无特别声明，本书以后所指的试验，均指随机试验. 例如：

(E_1) 在一定的条件下进行射击练习，考虑中靶的环数；

(E_2) 掷一枚硬币，观察朝上的面；

(E_3) 记录某汽车站某时段内候车的人数；

(E_4) 测试某种灯泡的寿命；

(E_5) 记录电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数；

(E_6) 抛掷一颗均匀的骰子，观察骰子出现的点数.

不难看出，这6个例子都满足随机试验的上述3个特征，它们均为随机试验.

3. 随机事件

在随机试验中，人们通常不仅关心某个样本点出现，更关心满足某些条件的样本点出现，即关心试验时可能出现的某种结果. 例如，在掷骰子的试验 E_6 中，我们可能关心是否出现点数1，抑或可能关注是否出现奇数点(点数1,3,5)等结果. 它们皆为样本空间的子集(随机试验可能出现的结果)，我们称之为**随机事件**，简称为**事件**. 随机事件通常用大写英文字母 A,B,C，或其带下标的形式 $A_1,B_2,C_k(k=1,2,\cdots)$ 等表示. 事件 A 在一次试验中发生，当且仅当本次试验结果 $\omega\in A$. 此外，我们称仅含一个样本点的随机事件(不能再分解的最简单的随机试验结果)为**基本事件**；由多个样本点构成的集合称为**复合事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点，样本点是 Ω 自身的一个子集. 显然在每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，我们

将其称为**必然事件**,仍记为 Ω. 因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集,空集不包含任何样本点,显然在每次试验中都不会发生,我们将其称为**不可能事件**. 很明显,必然事件与不可能事件并不具有随机性,但是为了讨论问题方便,也把它们看作特殊的随机事件.

4. 样本空间

我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,用 Ω 来表示. Ω 中的元素,即 E 的每一个可能结果,称为**样本点**,一般用 ω 表示.

例如 E_2 和 E_6 的样本空间分别为 $\Omega_2=\{$正面,反面$\}$和 $\Omega_6=\{1,2,3,4,5,6\}$.

样本空间的引入使得我们能用集合这一数学工具来研究随机事件. 这样一来,试验 E 的任一事件都是其样本空间的一个子集合. 特别地,E 的必然事件就是其样本空间 Ω 自身,E 的不可能事件记为 $\varnothing$,它对应着空集.

第二节　随机事件间的关系及运算

一、事件间的关系和运算

在概率论中,人们往往不仅要研究随机试验的一个事件,还要研究多个事件,而这些事件之间又有一定的联系. 为了表述事件间的联系,下面定义事件间的关系和运算.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$,如图 1-1 所示.

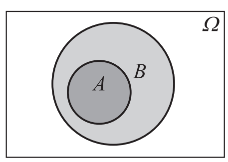


图 1-1

显然,对任何事件 A,$A\subset\Omega$. 为方便起见,规定对任何事件 A,$\varnothing\subset A$.

对于 A,B,C 事件,若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$. 这一性质称为包含关系的传递性.

若事件 A 所包含的基本事件与事件 B 所包含的基本事件完全相同,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$,如图 1-2 所示.

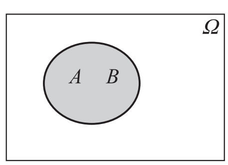


图 1-2

2. 和(并)事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,即事件 A 发生或事件 B 发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的和(并)事件,记作 $A\cup B$(或 $A+B$),如图 1-3 所示.

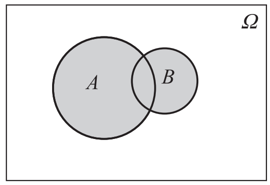


图 1-3

$A+B$ 是由所有属于事件 A 或事件 B 的基本事件组成. $A+B$ 发生当且仅当 A,B 至少有一个发生.

3. 积(交)事件

事件 A 与事件 B 同时发生,即事件 A 发生且事件 B 发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件,记作 $A\cap B$(或 AB),如图 1-4 所示.

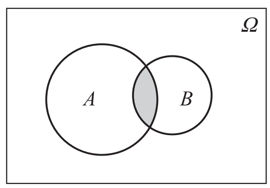


图 1-4

$A\cap B$ 是由所有既属于事件 A 又属于事件 B 的基本事件组成. $A\cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生.

4. 差事件

事件 A 发生且事件 B 不发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$),如图 1-5 所示.

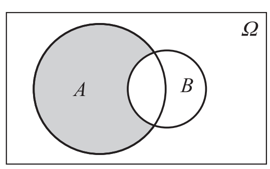


图 1-5

$A-B$ 是由所有属于事件 A 但不属于事件 B 的基本事件组成. $A-B$ 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生.

5. 互斥关系(互不相容)

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,则称事件 A 与事件 B 互斥,或称事件 A 与事件 B 互不相容,记作 $A\cap B=\varnothing$,如图 1-6 所示.

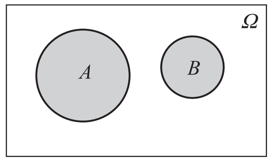


图 1-6

互斥的两个事件不含有共同的基本事件,基本事件间是互斥的,不可能事件与任何事件都是互斥的.

6. 对立(逆)事件

对于事件 A,若事件$\overline{A}$满足 $A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$,则把事件$\overline{A}$称为事件 A 的对立事件,如图 1-7 所示.

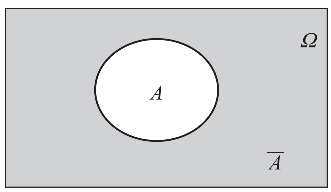


图 1-7

$\overline{A}$是由 Ω 中所有不属于 A 的基本事件组成的,若 A 发生,则$\overline{A}$必不发生,反之亦然.事件 A,$\overline{A}$对立,意味着在任何一次试验中,A,$\overline{A}$不可能同时发生且它们中恰好有一个发生.

显然对立事件一定是互斥的,但互斥的事件却不一定是对立的.

二、事件间的关系和运算的性质

当将事件看作集合时,上述 6 种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致(见表 1-1).例如,积事件 $A\cap B$ 是由那些既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合.A 与 B 互不相容则意味着构成 A 的样本点的集合与构成 B 的样本点的集合没有公共元素.

事件的和、积运算及互不相容关系可以推广到有限个事件及可列无穷个事件的情形:

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少一个发生$\}$,

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots=\{$可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$至少一个发生$\}$;

表 1-1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	逆事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少一个发生(和事件)	A 与 B 的和(并)集
$A\cap B$	事件 A、B 同时发生(积事件)	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生(差事件)	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A，B 互不相容	A 与 B 无公共元素

(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生$\}$，

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots=\{$可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$同时发生$\}$；

(3) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$两两互不相容.

例如在 E_5 中，设 $A_k=\{$恰接到 k 次呼唤$\}(k=0,1,\cdots)$，$B_k=\{$接到的呼唤不多于 k 次$\}$，则 $\bigcup\limits_{k=6}^{\infty}A_k=\{$至少有 6 次呼唤$\}$，$\bigcap\limits_{k=3}^{\infty}B_k=B_3$. 事件 $A_0,A_1,\cdots,A_k,\cdots$是互不相容的.

事实上，任何试验的基本事件都是互不相容的. 对互不相容的事件求和时，常将“$\cup$”号换成“$+$”号. 例如 E_5 中

$$\bigcup_{k=1}^{10}A_k = A_1+A_2+\cdots+A_{10} = \sum_{k=1}^{10}A_k.$$

如同集合运算规律一样，事件间的运算满足下列规律：

(1) 交换律： $A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律： $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) 分配律： $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 对偶律(德 · 摩根律)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k；$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

【例 1】 将两颗均匀的骰子各掷一次，若以(x,y)表示其结果，其中 x 表示第一颗骰子出现的点数，y 表示第二颗骰子出现的点数，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y):x,y=1,2,3,4,5,6\}.$$

若以 A,B,C,D 分别表示事件“点数之和等于 2”、“点数之和等于 5”、“点数之和超过 9”，“点数之和不小于 4 也不超过 6”. 试写出事件 A,B,C,D 包含的结果.

【解】 $A=\{(1,1)\}$；

$B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$；

$C=\{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$；

$D=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$

【例 2】 设 A,B,C 为三个随机事件，试表示以下事件：

(1) A,B,C 都发生；

(2) A,B 发生但 C 不发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中至少有一个发生.

【解】 (1) A,B,C 都发生可表示为 ABC；

(2) A,B 发生但 C 不发生可表示为 $AB\overline{C}=AB-C$；

(3) A,B,C 都不发生可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) A,B,C 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$.

第三节　随机事件的概率

对于随机试验，我们不仅关心它可能出现哪些结果(事件)，更重要的是要研究各种结果(事件)发生的可能性大小. 在初、高中我们已初步知道，对于随机事件 A，用数值 $P(A)$表示其发生的可能性大小，并称此数值 $P(A)$为随机事件 A 的概率. 下面我们给出概率的古典定义和统计定义，并研究概率的性质.

一、概率的古典定义

古典概率模型简称**古典概型**，通常是指具有下列两个特征的随机试验模型.

(1) 随机试验只有有限个可能的结果，即有限个样本点(有限性)；

(2) 每一个样本点发生的可能性相等(等可能性).

古典概型又称为**等可能性概型**. 在概率论产生和发展的过程中，它是最早的研究对象，在实际应用中它也是最常用的一种概率模型.

对于古典概型,以 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 表示样本空间,$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点,对于任意随机事件 $A=\{\omega_{i1},\cdots,\omega_{in}\}$,下面给出古典概型的定义.

定义 1.1(概率的古典概型定义)

对于给定的古典概型,若样本空间中有 n 个样本点,事件 A 含有 m 个样本点,则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}.$$

性质 1.1(古典概率的性质)

(1) 对于任意事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1$,$P(\varnothing)=0$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

【例 1】 某种产品共有 30 件,其中含正品 23 件,次品 7 件,从中任取 5 件.试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率.

【解】 设 A=“被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品”.由题设“从中任取 5 件”应理解为“一次取出 5 件”,故样本点总数 $n=C_{30}^5$.事件 A 包含的样本点数 $m=C_7^2C_{23}^3$,则所求概率为

$$P(A)=\frac{C_7^2C_{23}^3}{C_{30}^5}=0.261\ 0.$$

【例 2】 一批同类产品共 N 件,其中次品 M 件.现从中随机抽取 n 件(取后不放回),问这 n 件中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率是多少?

【解】 设 $A=\{$恰取到 k 件次品$\}$,由于 A 并不涉及抽取产品的次序,故可将试验设想成从 N 件编上号的产品中一次取出 n 件,每一种取法构成一个基本事件,总共有 C_N^n 种取法,A 发生意味着取到 k 件次品和 $n-k$ 件正品,k 件次品和 $n-k$ 件正品的取法分别为 C_M^k 及 C_{N-M}^{n-k} 种.由乘法原理,构成 A 的基本事件数为 $C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}$,故

$$P(A)=\frac{C_M^k\cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

【例 3】 某口袋中有 6 只球,其中 4 只白球,2 只红球,从袋中取球两次,每次随机地取一只.考虑两种取球方式.

① 第一次取一只球,观察其颜色后放回袋中,搅匀后再取一球,这种取球方式叫作有放回取球.

② 第一次取一只球不放回袋中,第二次从剩余的球中再取一只球,这种取球方式叫作无放回取球.

试分别就上面两种情况求:

(1) 取到的两只球都是白球的概率;

(2) 取到的两只球颜色相同的概率.

【解】 (1) 令 A_1 表示事件“取到的两只球都是白球”，则

有放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$，

无放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$；

(2) 令 A_2 表示事件“取到的两只球颜色相同”，则

有放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$，

无放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$.

【例 4】 袋中有 a 只白球、b 只红球，依次将球一只只摸出，不放回. 求第 k 次摸到白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

【解】 设 $A=\{$第 k 次摸到白球$\}$，由于并不关心第 k 次以后的取球结果，可设想将球编号，一只只抽取直至取出第 k 只球为止. 则基本事件总数是从 $a+b$ 只编号的球中选出 k 只球进行排列的种数，即 $n=\mathrm{A}_{a+b}^{k}$，A 发生意味着第 k 次取到白球. 此白球可能是 a 只白球中的任一只；而前 $k-1$ 次取的球则可能是除此白球之外的其余 $a+b-1$ 只中的任 $k-1$ 只，故由乘法原理得，$m=\mathrm{A}_a^1\cdot\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}$. 所以

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{m}{n}=\frac{\mathrm{A}_a^1\mathrm{A}_{a+b-1}^{k-1}}{\mathrm{A}_{a+b}^{k}}\\&=\frac{a\cdot(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}\\&=\frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

对本题也可给出另一种解法. 设想将 $a+b$ 只球编号，每次试验将 $a+b$ 只球逐一摸出并依次排列在 $a+b$ 个位置上，则基本事件总数为 $n=(a+b)!$，$k_A=\mathrm{A}_a^1\cdot(a+b-1)!$，故有

$$P(A)=\frac{(a+b-1)!\ a}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

注意到 $P(A)$ 与 k 无关，即无论第几次摸球，摸到白球的概率都是 $\frac{a}{a+b}$. 这一结果表明抽签、摸彩与先后次序无关，机会是均等的.

【例 5】 有 n 个人，每个人都以同样的概率 $\frac{1}{N}$ 被分配在 $N(n\leqslant N)$ 间房中的任一间中，试求下列各事件的概率：

(1) 某指定的 n 间房中各有一人；

(2) 恰有 n 间房，其中各有一人；

(3) 某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$ 人.

【解】 先求样本空间中所含样本点的个数.

首先，把 n 个人分到 N 间房中去共有 N^n 种分法；其次，求每种情形下事件所含的样本点个数.

(1) 某指定的 n 间房中各有一人，所含样本点的个数，即可能的分法为 $n!$；

(2) 恰有 n 间房中各有一人，所有可能的分法为 $C_N^n \cdot n!$；

(3) 某指定的一间房中恰有 m 人，可能的分法为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$.

于是可以得到三种情形下事件的概率分别如下：

(1) $\dfrac{n!}{N^n}$；

(2) $\dfrac{C_N^n \cdot n!}{N^n}$；

(3) $\dfrac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

在上述分房问题中，若令 $N=365$，$n=30$，$m=2$ 则可演化为生日问题.

全班有学生 30 人，求下列事件的概率：

(1) 某月指定为 30 天，每位学生生日各占一天；

(2) 全班学生生日各不相同；

(3) 全年某天，恰有两个学生是同一天的生日.

利用上述结论可得到概率分别如下：

(1) $\dfrac{30!}{365^{30}}$；

(2) $\dfrac{C_{365}^{30} \cdot 30!}{365^{30}}$；

(3) $\dfrac{C_{30}^2(364)^{28}}{(365)^{30}}$.

二、概率的统计定义

为得到概率的统计定义，首先引入频率的概念. 频率描述了事件发生的频繁程度.

定义 1.2(频率的定义) 若在同一组条件下将试验 E 重复 N 次，事件 A 发生了 m 次，则称比值 $\dfrac{m}{N}$ 为事件 A 在 N 次重复试验中发生的**频率**，记为 $f_N(A)$，即

$$f_N(A)=\frac{m}{N}.$$

人们在实践中发现，当重复试验次数 N 较大时，事件发生的频率往往可以大致反映事件发生的可能性大小. 为了解决更一般场合(如等可能性不成立)下概率的定义与计算问题，历史上许多人做了大量的试验来研究频率(表 1-2 记录了部分抛掷硬币的试验结果)，发现频率具有稳定性：当 N 很大时，频率值 $f_N(A)$ 会在某个常值附近摆动，而随着试验次数 N 的增大，这种摆动幅度会越来越小. 这个常值就是事件 A 发生的概率 $P(A)$.

频率的稳定性为人们用当 N 很大时的频率值近似地作为概率值提供了依据，由此，也