

江西省

职教高考复习用书



江西省

职教高考

全面突破

总复习

主编 温健 周金

数学



北京出版集团
北京教育出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

江西省职教高考. 全面突破总复习 数学 / 温健, 周金主编. --北京: 北京教育出版社, 2023. 8
ISBN 978-7-5704-5822-6

I. ①江… II. ①温… ②周… III. ①数学课—中等专业学校—升学参考资料 IV. ①G718.3

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 150683 号

江西省职教高考全面突破总复习: 数学

温 健 周 金 主 编

*

北京出版集团 出版
北京教育出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码: 100120

网址: www.bph.com.cn

京版北教文化传媒股份有限公司总发行

全国各地书店经销

北京盛通印刷股份有限公司印刷

*

889 mm×1 194 mm 16 开本 15.5 印张 373 千字

2023 年 8 月第 1 版 2023 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5704-5822-6

定价: 59.80 元

版权所有 翻印必究

质量监督电话: (010) 58572525 58572393 购书电话: (010) 59812309

前 言



通过多年的摸索与实践，江西省“三校生”对口升学考试越来越规范有序。职教高考是中等职业学校学生升入高等院校的重要途径，为了帮助广大考生全面、系统及高效地复习，我们特组织了一批江西省“三校生”对口升学考试的专家和多所中职学校的一线名师，以教育部颁布的《中等职业学校语文、数学、英语课程标准（2020年版）》和江西省最新“三校生”对口升学考试说明为依据，紧扣职教高考要求，深入研究近几年江西省“三校生”对口升学考试的命题情况，精心编写了本套江西省职教高考复习用书。

本书为系列丛书之《江西省职教高考全面突破总复习：数学》，具有以下特点。

- (1) 每一部分开篇即以思维导图的形式展现其知识结构，帮助考生厘清知识脉络。
- (2) “命题分析”模块以表格形式归纳近三年考试考查的知识点并给出复习建议，让考生明确复习方向。
- (3) “知识清单”模块对最新考试说明的知识点进行了全面、系统的梳理，并通过名师点拨、记忆口诀等特色侧栏来辅助考生理解掌握。
- (4) “典型例题”模块以考点为依据，通过典型例题讲解知识点，附答案和详细解析，并结合反思提炼等侧栏模块加强理解，便于考生随时查看、准确复习。
- (5) “同步训练”和“提升训练”模块根据专题知识点精心编写，起到巩固提高的作用。
- (6) 针对知识点，配备名师在线微课，详细讲解高频考点，供考生课前预习及课后自主学习。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，希望各校师生在使用过程中及时向我们提出修改意见和建议，使本书不断完善与提高。

最后，预祝所有考生顺利通过考试，取得优异成绩，迎接美好人生！

编 者

目 录

第一部分 集 合

专题一	集合的概念	2
专题二	集合之间的关系及运算	8
专题三	充要条件	15

第二部分 不等式

专题一	不等式的基本性质	20
专题二	不等式组及一元二次不等式	27
专题三	含绝对值的不等式	34

第三部分 函 数

专题一	函数的概念及表示法	40
专题二	函数的性质	47
专题三	函数的实际应用	59

第四部分 指数函数与对数函数

专题一	实数指数幂与指数函数	64
专题二	对数与对数函数	74

第五部分 三角函数

专题一	角的概念	82
专题二	正弦函数、余弦函数和正切函数	89
专题三	三角函数的基本公式	96
专题四	三角函数的图象与性质	106
专题五	解三角形	113

第六部分 数 列

专题一	数列的概念	120
专题二	等差数列	127
专题三	等比数列	133

第七部分 平面向量

专题一	平面向量的概念及线性运算	142
专题二	平面向量的坐标表示及内积	150

第八部分 平面解析几何

专题一	直线的方程	158
专题二	两条直线的位置关系	165
专题三	圆	171
专题四	椭圆、双曲线、抛物线	177

第九部分 立体几何

专题一	直线与平面的基本性质	190
专题二	线线角、线面角、二面角与空间距离	199
专题三	柱、锥、球	208

第十部分 概率与统计初步

专题一	排列组合	218
专题二	二项式定理	226
专题三	概率与统计	230

第

集合

部 分

集合的概念

- 集合的基本概念
- 集合的分类
- 集合的表示方法

集合之间的关系及运算

- 元素与集合的关系
- 集合与集合的关系
- 全集
- 交集、并集和补集

充要条件

- 命题
- 充分条件、必要条件、充要条件

 命题分析

年份	考查内容	题型	题量	分值	复习建议
2021	集合之间的关系及集合的运算	是非选择题	1题	3分	本部分在高考中为必考内容,多以是非选择题和单项选择题的形式出现,内容重点考查集合之间的关系、集合的运算、充要条件等知识,考查难度较低.复习过程中要明确给定集合的元素;子集、真子集、非空真子集的个数与集合元素个数的关系;从数和形两个角度理解集合的三种运算;理解充分条件和必要条件的含义.本部分复习应以基础题为主
	充要条件	是非选择题	1题	3分	
2022	集合的运算	是非选择题	1题	3分	
2023	集合的运算	是非选择题	1题	3分	
	充要条件	是非选择题	1题	3分	

专题一 集合的概念

 知识清单

1. 集合的基本概念

1) 集合的定义

通常将某些确定的对象看成一个整体就构成一个集合,简称为集.一般用大写英文字母 A, B, C, \dots 表示集合.

2) 元素

组成集合的对象叫作这个集合的元素.一般用小写英文字母 a, b, c, \dots 表示集合的元素.

3) 元素与集合

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A ,记作 $a \in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A ,记作 $a \notin A$.



集合与充要条件



名师点拨

分清“ \in ”和“ \subseteq ”：“ \in ”是元素与集合之间的连接符号，“ \subseteq ”是集合与集合之间的连接符号.

4) 集合元素的性质

(1) 确定性: 对于给定的集合, 它的元素必须是确定的.

(2) 互异性: 对于给定的集合, 它的元素是互不相同的, 相同的对象归入同一个集合时, 只能算作这个集合的一个元素.

(3) 无序性: 对于给定的集合, 不考虑元素之间的顺序关系.

5) 常见数集及其记法

数集: 由数组成的集合. 常见数集的记法见下表:

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
符号	\mathbf{N}	\mathbf{N}^* 或 \mathbf{N}_+	\mathbf{Z}	\mathbf{Q}	\mathbf{R}
性质	所有自然数组成的集合	所有正整数组成的集合	所有整数组成的集合	所有有理数组成的集合	所有实数组成的集合

2. 集合的分类

(1) 有限集: 含有有限个元素的集合.

例 小于 5 的自然数组成的集合为有限集.

(2) 无限集: 含有无限个元素的集合.

例 所有正偶数组成的集合为无限集.

(3) 空集: 不含任何元素的集合, 记作 \emptyset .

3. 集合的表示方法

1) 列举法

把集合的元素一一列举出来, 写在大括号内, 这种表示集合的方法叫作列举法.

例 方程 $x^2 - 1 = 0$ 的解集, 用列举法可表示为 $\{-1, 1\}$.

2) 描述法

利用元素的特征来表示集合的方法叫作描述法. 具体表现形式为 $\{x | p(x)\}$, 其中“ x ”为集合的代表元素, “ $p(x)$ ”为元素所具有的共同特征, “ $|$ ”不可省略.

例 小于 5 的实数的集合用描述法可表示为 $\{x | x < 5, x \in \mathbf{R}\}$.

3) 图示法

用数轴或韦恩图来表示集合的方法叫作图示法.

例 ①用数轴表示大于 1 且小于 2 的实数的集合.



名师点拨

空集是一个集合, 它不含任何元素; 0 是自然数, 它可以作为某一集合的一个元素.



名师点拨

使用列举法的要点:

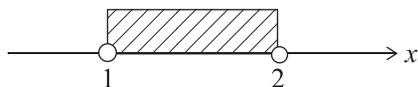
- ① 元素之间用逗号“,”隔开;
- ② 元素不能重复;
- ③ 元素不能遗漏;
- ④ 无须考虑元素的排列顺序;
- ⑤ 适用于元素较少的集合.



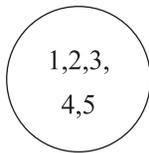
名师点拨

使用描述法的要点:

- ① 明确集合中的代表元素;
- ② 明确集合中元素的特征;
- ③ 描述元素特征时语言要简明、准确、无歧义;
- ④ 所有描述的内容都写在大括号内.



②用韦恩图表示集合 $\{1,2,3,4,5\}$.



典型例题

考点 1: 集合的基本概念

例题1 下列选项中可构成集合的是()

- A. 班里个子高的学生 B. 所有的素数
C. 所有好看的电影 D. 面积较小的六边形

【解题关键】 利用集合中元素的确定性.

【解析】 选 B.

A, C, D 选项中“个子高的学生”“好看的电影”“面积较小的六边形”都没有一个绝对的标准,不能确定对象的归属,故 A, C, D 选项不能构成集合. B 选项中“所有的素数”能确定元素的归属,故 B 选项可构成集合.

考点 2: 有限集和无限集

例题2 下列选项中说法正确的是()

- A. 2 与 3 的所有公倍数组成的集合是有限集
B. 方程 $x^2 - x - 6 = 0$ 的解集是无限集
C. 不等式 $2x - 5 > 0$ 的解集是无限集
D. 平面内到定点 $P(0,0)$ 的距离等于 3 的点的集合是有限集

【解题关键】 利用有限集和无限集的概念.

【解析】 选 C.

A 选项中只要是 6 的倍数均满足题意,而这样的数有无限个,故应是无限集, A 选项错误.

B 选项中方程仅有两个根 $-2, 3$, 故为有限集, B 选项错误.

C 选项中只要是满足 $x > \frac{5}{2}$ 的实数均可,这样的数有无限个,故为无限集, C 选项正确.

D 选项中平面内到定点 $P(0,0)$ 的距离等于 3 的点是圆心为 $(0,0)$ 、

反思提炼

充分理解集合中元素的确定性.

半径为 3 的圆上的所有的点,有无限个,故为无限集,D 选项错误.

考点 3:集合中元素性质的运用

例题 3 已知集合 $A = \{3, x, x^2 - 2x\}$, 求实数 x 的取值范围.

【解题关键】 根据集合元素的互异性求解.

【解析】 由集合中元素的互异性可得
$$\begin{cases} 3 \neq x, \\ 3 \neq x^2 - 2x, \\ x \neq x^2 - 2x, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x \neq 3, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$$

\therefore 实数 x 的取值范围是 $\{x | x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq 0, x \neq -1, x \neq 3\}$.

例题 4 设 $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$, 且 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 求 $b-a$ 的值.

【解题关键】 根据集合相等情况下元素相同及集合元素的互异性求值,必要时进行分类讨论.

【解析】 由题意可知 $a \neq 0$, 且 $a+b=0$, 则 $\frac{b}{a} = -1$,

所以
$$\begin{cases} a = \frac{b}{a} = -1, \\ b = 1, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \end{cases} \quad \text{所以 } b-a=2.$$

考点 4:集合的表示法

例题 5 用列举法表示下列集合:

(1) 小于 4 的所有自然数组成的集合;

(2) 方程 $x^2 - 6x + 5 = 0$ 的解集;

(3) 全体正偶数组成的集合;

(4) 方程组 $\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=2 \end{cases}$ 的解组成的集合.

【解题关键】 熟悉集合的列举法.

【解析】 (1) $\{0, 1, 2, 3\}$; (2) $\{1, 5\}$;
(3) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$; (4) $\{(1, 1)\}$.

例题 6 用描述法表示下列集合:

(1) 绝对值不大于 2 的所有有理数组成的集合;

(2) 不等式 $-2x + 4 > 0$ 的所有解组成的集合;

(3) 被 3 除余 2 的所有自然数组成的集合;

(4) 第一象限的所有点组成的集合.

【解题关键】 熟悉集合的描述法.

【解析】 (1) $\{x | |x| \leq 2, x \in \mathbf{Q}\}$; (2) $\{x | x < 2\}$;
(3) $\{x | x = 3k + 2, k \in \mathbf{N}\}$; (4) $\{(x, y) | x > 0, y > 0\}$.

反思提炼

牢记集合中元素的三个特性:确定性、互异性和无序性.

反思提炼

区分表示集合的列举法与描述法:

① 共同点:两边都用大括号括起来.

② 不同点:列举法是把元素直接列举出来,用逗号隔开;描述法是由“代表元素”“|”和“代表元素的共同特征”三部分构成.

同步训练

训练1 下列选项不能组成集合的是()

- A. 大于 6 的所有整数
B. 相反数等于它本身的数
C. 某职业学校爱笑的女学生
D. 函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象上的所有点

训练2 下列集合中,是有限集的是()

- A. 不超过 9 的所有自然数组成的集合
B. 大于 9 的所有自然数组成的集合
C. 小于 9 的所有整数组成的集合
D. 平面内到点(1,2)的距离相等的点的集合

训练3 若 $2 \in \{1, x^2 + x\}$, 则 x 的值为()

- A. -2 B. 1 C. 1 或 2 D. -2 或 1

训练4 用适当的方法表示下列集合:

- (1) 大于 2 且小于 10 的所有整数组成的集合;
(2) 方程 $|x| = 3$ 的解集;
(3) 被 7 除余 3 的所有正整数组成的集合;
(4) 在 x 轴上的所有点组成的集合.

提升训练

一、是非选择题

对每小题的命题作出判断,对的选 A,错的选 B.

1. 集合{一条边长为 5, 一个角是 40° 的等腰三角形}中元素的个数为 4. (A B)
2. 由全体实数组成的集合可以表示为:①{实数};②{实数集};③ \mathbf{R} ;④ $\{\mathbf{R}\}$. 其中表示正确的有 3 种. (A B)
3. 集合 $M = \{\text{大于 0 且小于 1 的数}\}$, $P = \{\text{定圆 } C \text{ 的内接三角形}\}$, $Q = \{\text{能被 7 整除的数}\}$ 都是无限集. (A B)
4. 若 $3 \in \{2, x+4, x^2-2x\}$, 则 x 的值为 3. (A B)
5. $\{3, 1\}$ 可表示方程组 $\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-y=2 \end{cases}$ 的解集. (A B)

二、单项选择题

6. 下列选项不能组成集合的是()
A. 2022 年卡塔尔世界杯所有的参赛队伍 B. 中国文学四大名著
C. 中国的小城市 D. 中国的直辖市

7. 下列集合是有限集的是()

A. $\{x|x>1, x\in\mathbf{Q}\}$

B. $\{x|x=2n+1, n\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x|x^2-3=0\}$

D. $\{x|x^2-4>0\}$

8. 下列选项中用列举法表示集合 $\{(x,y)|x+y=0 \text{ 且 } 2x-y=3\}$ 正确的是()

A. $\{(1,-1)\}$

B. $(1,-1)$

C. $\{1,-1\}$

D. $\{x=1, y=-1\}$

9. 设 A 是小于 4 的有理数组成的集合, 则下列结论中错误的是()

A. $-2\in A$

B. $\frac{1}{3}\in A$

C. $\pi\in A$

D. $3\in A$

三、填空题

10. 用符号“ \in ”或“ \notin ”填空:

(1) $\frac{1}{3}$ _____ \mathbf{Q} ; (2) $\sqrt{3}$ _____ \mathbf{N} ; (3) 0 _____ \mathbf{Q} .

11. 集合 $M=\{x|-2<x\leq 3, x\in\mathbf{N}\}$ 中元素的个数为_____.

12. 若方程 $x^2+mx+n=0$ 的解集为 $\{-1, 2\}$, 则 $m=$ _____, $n=$ _____.

13. 已知集合 $A=\{4, x, x^2-3x\}$, 则实数 x 的取值范围为_____.

四、解答题

14. 用列举法表示集合 $\{(x,y)|x+y=5, x\in\mathbf{N}, y\in\mathbf{N}\}$.

15. 用适当的方法表示下列元素组成的集合:

(1) 绝对值不超过 4 的所有实数;

(2) 20 以内的所有质数;

(3) 除以 6 余数为 2 的所有正整数;

(4) 第一、三象限内所有的点.

16. 已知集合 $A=\{x|ax^2-2x+1=0, x\in\mathbf{R}\}$, 且集合 A 至少有一个元素, 求实数 a 的取值范围.

专题二 集合之间的关系及运算

知识清单

1. 元素与集合的关系

元素与集合的关系有且仅有两种：属于(用符号“ \in ”表示)和不属于(用符号“ \notin ”表示)。

2. 集合与集合的关系



名师点拨

子集的特点：

① 任何一个集合都是它本身的子集；

② 任何一个集合都至少有1个子集；

③ 任何一个非空集合都至少有2个子集；

④ 含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集；

⑤ 含有 n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个非空子集。

真子集的特点：

① 含有 n 个元素的集合有 $2^n - 1$ 个真子集；

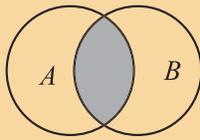
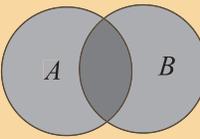
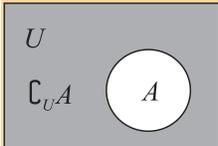
② 含有 n 个元素的集合有 $2^n - 2$ 个非空真子集。

名称	意义	表达式	性质	示意图
子集	如果集合 B 中的元素都是集合 A 中的元素,那么把集合 B 叫作集合 A 的子集	记作 $B \subseteq A$ (或 $A \supseteq B$), 读作“ B 包含于 A ”(或 A 包含 B)	1. $B \subseteq B$; 2. $\emptyset \subseteq B$; 3. 若 $B \subseteq A$ 且 $A \subseteq C$, 则 $B \subseteq C$	
真子集	如果集合 B 是集合 A 的子集,并且 A 中至少有一个元素不属于 B , 那么把 B 叫作 A 的真子集	记作 $B \subsetneq A$ (或 $A \supsetneq B$), 读作 B 真包含于 A (或 A 真包含 B)	1. $\emptyset \subsetneq A$ (A 为非空集合); 2. 若 $B \subsetneq A$ 且 $A \subsetneq C$, 则 $B \subsetneq C$	
集合相等	如果两个集合的元素完全相同,那么就称这两个集合相等	记作 $A = B$	$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$	

3. 全集

如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集. 在研究数集时,常把实数集 \mathbf{R} 作为全集.

4. 交集、并集和补集

名称	定义	表达式	性质	示意图
交集	对于两个给定的集合 A, B , 由既属于 A 又属于 B 的所有元素组成的集合叫作 A 与 B 的交集	记作 $A \cap B$, 读作“ A 交 B ”, 即 $A \cap B = \{x x \in A \text{ 且 } x \in B\}$	1. $A \cap B = B \cap A$; 2. $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; 3. $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$	
并集	对于两个给定的集合 A, B , 由集合 A, B 的所有元素组成的集合叫作 A 与 B 的并集	记作 $A \cup B$, 读作“ A 并 B ”, 即 $A \cup B = \{x x \in A \text{ 或 } x \in B\}$	1. $A \cup B = B \cup A$; 2. $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$; 3. $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$	
补集	如果集合 A 是全集 U 的子集, 那么, 由 U 中不属于 A 的所有元素组成的集合叫作 A 在全集 U 中的补集	记作 $\complement_U A$, 读作“ A 在 U 中的补集”, 即 $\complement_U A = \{x x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$	1. $A \cup (\complement_U A) = U$; 2. $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$; 3. $\complement_U (\complement_U A) = A$; 4. $\complement_U U = \emptyset$; 5. $\complement_U \emptyset = U$	

典型例题

考点 1: 集合之间的关系的判断和符号的运用

例题1 下列四个命题中正确的个数是()

- ①空集没有子集;
- ②空集是任何集合的真子集;
- ③任何集合必有两个或两个以上的子集;
- ④集合 $\{(2, -1)\}$ 有 3 个真子集.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【解题关键】 利用空集与子集、真子集的关系, 以及元素个数与集合的子集、真子集、非空子集、非空真子集的个数之间的关系解题.

【解析】 选 A.



记忆口诀

交集且, 取小和公共;
并集或, 取大和所有;
补集剩, 全集当中找剩余.



反思提炼

理解空集是任何集合的子集, 空集是任何非空集合的真子集.

考点 3:集合的运算

例题5 设集合 $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{-1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{-1, 0, 1\}$

【解题关键】 注意集合中元素的特性.

【解析】 选 D.

因为集合元素的互异性, 所以 $A \cup B = \{-1, 0, 1\}$.

例题6 已知集合 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x \mid \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(0, 2)$ B. $[0, 2]$ C. $\{0, 2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【解题关键】 求出不等式的解集, 再利用集合的运算求出答案.

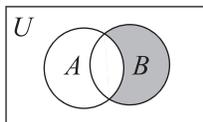
【解析】 选 D.

因为 $A = \{x \mid |x| \leq 2, x \in \mathbf{R}\} \Rightarrow A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$,

$B = \{x \mid \sqrt{x} \leq 4, x \in \mathbf{Z}\} \Rightarrow B = \{x \mid 0 \leq x \leq 16, x \in \mathbf{Z}\}$,

故 $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

例题7 (2018年真题) 如图所示, 集合 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2\}$, 则图中阴影部分所表示的集合是 ()



- A. $\{1, 2\}$ B. $\{2\}$ C. $\{2, 4\}$ D. $\{4\}$

【解题关键】 理解集合与集合之间的关系及其示意图的表示方式.

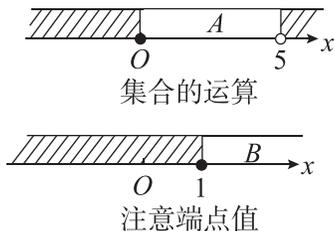
【解析】 选 B.

由图可知, 阴影部分表示的集合为 $(\complement_U A) \cap B = \{2\}$.

例题8 设全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid 0 < x \leq 5\}$, 集合 $B = \{x \mid x > 1\}$, 求 $\complement_U A$, $\complement_U B$.

【解题关键】 利用补集的定义及数轴解决此类问题.

【解析】 $\complement_U A = \{x \mid x \leq 0 \text{ 或 } x > 5\}$, $\complement_U B = \{x \mid x \leq 1\}$.



反思提炼

在考查集合的运算时很容易出现集合元素的遗漏和重复, 一定要牢记集合元素的互异性, 检查答案是否有遗漏和重复.

反思提炼

对于不等式的集合运算, 通常采用“数轴法”.

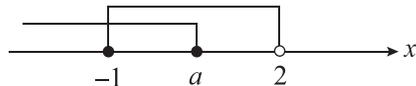
考点 4: 集合运算的综合运用

例题9 设集合 $M = \{x | -1 \leq x < 2\}$, 集合 $N = \{x | x \leq a\}$, 若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是_____.

【解题关键】 可利用数轴解决此类问题.

【解析】 $\{a | a \geq -1\}$.

可画出集合 M 的数轴图:



由数轴可知若 $M \cap N \neq \emptyset$, 则 $a \geq -1$.

例题10 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | a-2 < x < a+2\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\}$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 若 $a=0$, 求 $A \cup B$;

(2) 若 $(\complement_U A) \cap B \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

【解题关键】 应考虑集合中每个元素的情况.

【解析】 (1) 当 $a=0$ 时, 可得 $A = \{x | -2 < x < 2\}$, $B = \{x | x^2 - 2x = 0\} = \{0, 2\}$, 所以 $A \cup B = \{x | -2 < x \leq 2\}$.

(2) $B = \{x | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} = \{x | (x-2)(x-a) = 0\} = \{a, 2\}$,

因为 $A = \{x | a-2 < x < a+2\}$,

所以 $\complement_U A = \{x | x \leq a-2 \text{ 或 } x \geq a+2\}$, 所以 $a \notin \complement_U A$,

因为 $(\complement_U A) \cap B \neq \emptyset$, 所以 $2 \in \complement_U A$, 所以 $2 \leq a-2$ 或 $2 \geq a+2$,

解得 $a \geq 4$ 或 $a \leq 0$, 则 a 的取值范围是 $\{a | a \leq 0 \text{ 或 } a \geq 4\}$.

反思提炼

当两个集合同时含有参数时, 要充分利用题目中其他已知条件, 并结合集合元素的性质, 简化代入计算.

同步训练

训练1 下列说法正确的是()

- A. 无限集的真子集是有限集
B. 自然数集是整数集的真子集
C. 任何一个集合必定有两个子集
D. $\{1\}$ 是质数集的真子集

训练2 集合 $A = \{x | 0 \leq x < 3, x \in \mathbf{N}\}$ 的真子集的个数是()

- A. 16
B. 8
C. 7
D. 4

训练3 已知集合 $M = \{1, 2, a^3 - a\}$, 集合 $N = \{0, a + 1, 3 - a^2\}$, 且 $M \cap N = \{0, 1\}$, 则实数 a 的值的集合是()

- A. $\{0\}$
B. $\{0, 1\}$
C. $\{1\}$
D. \emptyset

训练4 用符号“ \in ”“ \notin ”“ \subseteq ”“ \supseteq ”或“ $=$ ”填空:

- (1) $\{1\}$ _____ $\{0, 1, 2\}$; (2) 3.14 _____ \mathbf{Q} ; (3) \mathbf{N} _____ $\{1, 2, 3\}$;
(4) \mathbf{Z} _____ \mathbf{Q} ; (5) $\{x | x^2 - 1 = 0\}$ _____ $\{x | |x| = 1\}$.

训练5 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 集合 $B = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$

_____.

提升训练

一、是非选择题

对每小题的命题作出判断, 对的选 A, 错的选 B.

- 已知集合 $A = \{x | x - 2 \geq 0\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $B \subseteq A$. (A) (B)
- (2021 年真题) 若集合 $A \subseteq B$, U 为全集, 则 $\complement_U A \supseteq \complement_U B$. (A) (B)
- 已知集合 $A = \{x | x > -1\}$, 则 $\{0\} \in A$. (A) (B)
- (2023 年真题) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 4\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cup B = \{x | x < 4\}$. (A) (B)
- (2022 年真题) 已知集合 $A = \{x | 1 < x < 3\}$, $B = \{x | x < 2\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) = \{x | 2 \leq x < 3\}$. (A) (B)

二、单项选择题

- 下列说法错误的是()
A. 空集是任何非空集合的真子集
B. 空集没有子集
C. 任何非空集合都有真子集
D. 有限集的真子集的个数是有限的
- 若集合 M 满足 $\{a, b\} \subsetneq M \subseteq \{a, b, c, d\}$, 则这样的集合 M 的个数是()
A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

专题三 充要条件

知识清单

1. 命题

在数学中,我们把用语言、符号或式子表达的,可以判断真假的陈述句叫作命题.正确的命题称为真命题,错误的命题称为假命题.

2. 充分条件、必要条件、充要条件

在数学中,“若 p ,则 q ”是命题的常见形式.其中 p 是命题的条件, q 是命题的结论:

①如果由条件 p 成立推出结论 q 成立,即 $p \Rightarrow q$,则条件 p 是结论 q 的充分条件;

②如果由结论 q 成立推出条件 p 成立,即 $q \Rightarrow p$,则条件 p 是结论 q 的必要条件;

③如果 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$,即 $p \Leftrightarrow q$,则条件 p 是结论 q 的充要条件;

④如果 $p \not\Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$,则条件 p 是结论 q 的既不充分也不必要条件.

典型例题

考点 1:真命题与假命题

例题1 下列命题是真命题的是()

- A. 若三角形的一个内角是锐角,则此三角形是锐角三角形
- B. 若 $A \cup B = B$,则 $A \subseteq B$
- C. 若 $A \cap B = \emptyset$,则 $A = \emptyset$ 或 $B = \emptyset$
- D. 若 $x \in \mathbf{Z}$,则 $x \in \mathbf{N}$

【解题关键】 熟练掌握数学定义和符号.

【解析】 选 B.

A 选项中三角形需三个角都为锐角时才为锐角三角形,故为假命题.

C 选项中如图所示的情况下, $A \cap B = \emptyset$,但集合 A, B 都不为空集,



记忆口诀

小推大(小范围的可推出大范围的).



反思提炼

对真、假命题的判断:不仅要了解真命题与假命题的概念,还要对数学中其他部分的知识点熟练掌握.

故为假命题.



D 选项中 x 也可能为负整数, 故为假命题.

考点 2: 充分条件、必要条件、充要条件的判定

例题 2 “ $\sqrt{x^2} = -x$ ”的充要条件是()

- A. $x \leq 0$ B. $x > 0$ C. $x \geq 0$ D. $x < 0$

【解题关键】 根据充要条件的定义求出 x 的取值范围.

【解析】 选 A.

由 $\sqrt{x^2} = -x$, 可知 $-x \geq 0$, 即 $x \leq 0$.

例题 3 “ $x < -2$ ”是“ $x^2 - 4 > 0$ ”的()

- A. 充分条件 B. 必要条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【解题关键】 先求出不等式的解集, 再根据充要条件的概念判断.

【解析】 选 A.

因为 $x < -2 \Rightarrow x^2 - 4 > 0$, 而 $x^2 - 4 > 0 \not\Rightarrow x < -2$, 例如 $x > 2$ 时, $x^2 - 4 > 0$, 故“ $x < -2$ ”是“ $x^2 - 4 > 0$ ”的充分条件.

考点 3: 充分条件、必要条件、充要条件的综合运用

例题 4 若 $p: m > 0, q: \text{方程 } x^2 + x - m = 0 \text{ 有实根}$, 则 p 是 q 的什么条件?

【解题关键】 判断 p 是否能推出 q , 再判断 q 是否能推出 p .

【解析】 ① $m > 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4m > 0$, 则方程有实根;

② $x^2 + x - m = 0$ 有实根, 则 $\Delta = 1 + 4m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{4} \not\Rightarrow m > 0$.

$\therefore p$ 是 q 的充分条件.

例题 5 (2018 年真题) 若“ $1 \leq x \leq 2$ ”是“ $x \geq m$ ”的充分条件, 则实数 m 的取值范围是()

- A. $(2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

【解题关键】 理解充分条件的概念.

【解析】 选 D.

由题可知, “ $1 \leq x \leq 2$ ”可推出“ $x \geq m$ ”且“ $x \geq m$ ”无法推出“ $1 \leq x \leq 2$ ”, 则 $m \leq 1$, 即 m 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

反思提炼

在判断充分条件与必要条件时, 须注意条件与结论对应的方向.

反思提炼

对于充分条件、必要条件、充要条件综合运用的题, 应将所有可能出现的情况都考虑到.

同步训练

训练1 下列选项中, q 是 p 的充要条件的是()

- A. $p: 3x+2>5, q: -2x-3x>-5$
 B. $p: a>2, q: a>3$
 C. p : 四边形的两条对角线互相平分, q : 四边形是正方形
 D. $p: a \neq 0, q$: 关于 x 的方程 $ax=1$ 有唯一解

训练2 用“充分条件”“必要条件”或“充要条件”填空:

- (1) “ x 是偶数”是“ x 是整数”的 _____;
 (2) “ $x=3$ ”是“ $x^2=9$ ”的 _____;
 (3) “ $-1<x<0$ ”是“ $x<5$ ”的 _____;
 (4) “ $(x-2)(x-3)=0$ ”是“ $x-2=0$ ”的 _____;
 (5) “同位角相等”是“两直线平行”的 _____.

提升训练

一、是非选择题

对每小题的命题作出判断, 对的选 A, 错的选 B.

- 命题“平行四边形对角线相等且互相平分”是真命题. (A B)
- 设 P, Q 为非空集合, 命题甲: $P \cap Q = P \cup Q$, 命题乙: $P \subseteq Q$, 那么甲是乙的充分条件. (A B)
- 若 A, B 是两个非空集合, “对于任意的 $x \in A$, 都有 $x \in B$ ”是“集合 A 是集合 B 的真子集”的必要条件. (A B)
- (2023 年真题) “ $x>2$ ”是“ $x^2>4$ ”的充分条件. (A B)
- “ $xy=0$ ”是“ $x^2+y^2=0$ ”的充要条件. (A B)

二、单项选择题

- “ $x^2>1$ ”是“ $x>0$ ”的()
 A. 充要条件
 B. 充分条件
 C. 必要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- “ $A \cap B = \emptyset$ ”是“ $A = \emptyset$ ”的()
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件
- 在平面内, 若 p : 四边形外接于圆, q : 四边形的对角互补, 则 p 是 q 的()
 A. 充分条件
 B. 必要条件
 C. 充要条件
 D. 既不充分也不必要条件

9. “ $x > 3$ ”是“ $x^2 > 4$ ”的()

- A. 必要条件
C. 充要条件

- B. 充分条件
D. 既不充分也不必要条件

三、填空题

10. 已知 p, q 都是 r 的必要条件, s 是 r 的充分条件, q 是 s 的充分条件, 则 s 是 q 的 _____ 条件, p 是 s 的 _____ 条件.

11. “三角形为等边三角形”是“三角形为等腰三角形”的 _____ 条件.

12. 设集合 $M = \{x | 0 < x \leq 3\}$, 集合 $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 那么“ $a \in M$ ”是“ $a \in N$ ”的 _____.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ”是“ $A = 30^\circ$ ”的 _____ 条件.

四、解答题

14. 下列各组命题中, p 是 q 的什么条件?

(1) $p: A \subseteq B, q: A \cap B = A$;

(2) p : 末位数是 5 的整数, q : 可以被 5 整除的数;

(3) $p: xy = 0, q: x, y$ 至少有一个为 0.

15. 设 $x, y \in \mathbf{R}$, 求证: $|x + y| = |x| + |y|$ 成立的充要条件是 $xy \geq 0$.

16. 已知 p : 实数 x 满足不等式 $(x - 9)(x - 6) < 0$, q : 实数 x 满足不等式 $x^2 - 3kx + 2k^2 \leq 0$, 其中 $k > 0$. 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 k 的取值范围.