中等职业学校公共基础课程配套教学用书

数学 导学与同步练习

拓展模块一（下册）

主编　盛其杰

汕頭大學出版社

中 等 职 业 学 校 公 共 基 础 课 程 配 套 教 学 用 书

数学 导学与同步练习

拓展模块一（下册）

主　编　盛其杰

副主编　杨　婷

汕頭大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学导学与同步练习 ：拓展模块一. 下册 / 盛其杰主编. — 汕头 ：汕头大学出版社，2023.11
ISBN 978-7-5658-5168-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①盛… Ⅲ. ①数学课－中等专业学校－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 212174 号

数学导学与同步练习 ：拓展模块一. 下册　SHUXUE DAOXUE YU TONGBU LIANXI TUOZHAN MOKUAIYI XIACE

主　　编：盛其杰
责任编辑：邹　峰
责任技编：黄东生
封面设计：易　帅
出版发行：汕头大学出版社
　　　　　广东省汕头市大学路 243 号汕头大学校园内　邮政编码:515063
电　　话：0754-82904613
印　　刷：天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本：880mm×1230mm　1/16
印　　张：11
字　　数：234 千字
版　　次：2023 年 11 月第 1 版
印　　次：2023 年 11 月第 1 次印刷
定　　价：34.00 元
ISBN 978-7-5658-5168-1

PREFACE

前 言

本书根据教育部制定的《中等职业学校数学课程标准(2020年版)》(以下简称《课程标准》)编写而成，旨在落实立德树人根本任务，发展素质教育，帮助学生获得数学基础知识和基本技能、掌握基本数学思想、积累基本数学活动经验、形成理性思维和科学精神.

本书是与中等职业学校公共基础课程教材《数学　拓展模块一(下册)》配套的练习册.全书内容与教材对应，设置"知识梳理""例题详解""规律总结""实战训练"等模块，融导学和课堂练习为一体."例题详解"含每个例题的变式训练，用于考查学生举一反三、学以致用的能力."实战训练"分为A组和B组，A组针对《课程标准》中学业质量水平一的要求而设置，以基础知识考查为主;B组针对《课程标准》中学业质量水平二的要求而设置，有一定难度.每章前提出"学习目标"，便于教师参考，也为学生的复习指明方向.每章配备一套测试卷，用于检测学生对本章知识的掌握程度.本书末还附有两套综合模拟测试卷，既可供学生全面总结、复习巩固使用，也可作为期末考试卷.

本书可供中等职业学校的学生使用.

本书在编写过程中，得到了相关教学研究专家的悉心指导和大力支持，在此一并表示感谢! 由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请广大读者批评指正，以便后续修订和完善.

编　者

CONTENTS

目　录

第6章　三角计算

学习目标

1. 理解两角和与差的余弦、正弦和正切公式，体会三角恒等变换的特点.

2. 了解二倍角的正弦、余弦及正切公式的证明过程，掌握二倍角的正弦、余弦及正切公式，并能灵活运用公式解决问题.

3. 掌握正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像、性质，能利用"五点法"作出正弦型函数的图像，能利用正弦型函数的性质(定义域、值域、周期性和单调性)解决相关问题.

4. 掌握正弦定理、余弦定理和三角形面积公式，能运用正弦定理和余弦定理解决三角形中的边角问题和度量问题.

5. 会应用三角计算解决一些生产、生活中的简单实际问题.

6.1　和角公式

6.1.1　两角和与差的余弦公式

知识梳理

两角和与差的余弦公式：

(1) $\cos(\alpha+\beta)=$________；

(2) $\cos(\alpha-\beta)=$________.

例题详解

例1　已知 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 的值.

点拨　本题主要考查两角和的余弦公式.

解析　$\because \sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，且 $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$，$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{4}{5}$，

$\therefore \cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{4}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

变式训练　已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=-\dfrac{5}{13}$，且 α 为第一象限角，β 为第二象限角，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

例 2　求 $\cos 75°$ 的值.

点拨　本题主要考查两角差的余弦公式，化所求角为两个特殊角的差是解题的关键.

解析　$\cos 75°=\cos(120°-45°)=\cos 120°\cos 45°+\sin 120°\sin 45°$

$$=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

变式训练　利用两角差的余弦公式证明下列各式.

(1) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$；　　(2) $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$.

规律总结

1. 对于两角和与差的余弦公式，公式的左边是和(差)角的余弦，右边是含有同名函数之积的差(和)式，可用口诀“余余正正号相反”记忆公式.

2. 在利用两角和与差的余弦公式求非特殊角的三角函数的值时，要先把非特殊角转化为特殊角的运算式，再用公式直接化简求值即可.

实战训练

A组

1. $\cos(-15°)=$(　　).

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. $\cos 80°\cos 20°+\sin 80°\sin 20°=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=$(　　).

A. $\cos 2\alpha$　　B. $\cos 2\beta$　　C. $-\cos 2\alpha$　　D. $-\cos 2\beta$

4. 在平面直角坐标系中，已知向量 $\boldsymbol{a}=(\cos 79°,\sin 79°)$，$\boldsymbol{b}=(\cos 19°,\sin 19°)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

5. 已知角 α,β 满足 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha\sin\beta$，则(　　).

A. $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{6}$　　B. $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{4}$　　C. $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{4}$　　D. $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{6}$

6. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{5}$，且 α 是第二象限角，求 $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

7. 已知 α,β 均为第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{8}{17}$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha-\beta)$ 的值.

8. 化简：

(1) $\cos(\alpha+60^\circ)\cos\alpha+\sin(\alpha+60^\circ)\sin\alpha$；　　(2) $\cos(\alpha-\beta)\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)\sin\beta$.

9. 设 α 为锐角，证明：

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$；　　(2) $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

B组

1. 已知 $\cos\alpha\cos\beta=1$，求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

2. 已知 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}$，求 α 的值.

3. 在$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=-\dfrac{12}{13}$，求 $\cos(A-B)$的值.

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{5}$，$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{3}{5}$，且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$，$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$，求 $\cos 2\alpha$ 与 $\cos 2\beta$ 的值.

6.1.2　两角和与差的正弦公式

知识梳理

两角和与差的正弦公式：

(1) $\sin(\alpha+\beta)=$________；

(2) $\sin(\alpha-\beta)=$________.

例题详解

例 1　已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

点拨　本题主要考查两角和与差的正弦公式的计算.

解析　$\because \sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\therefore \cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{3}$，

又 $\cos\beta=-\frac{3}{4}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$，

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{-6+\sqrt{35}}{12}$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)=\frac{-6-\sqrt{35}}{12}$.

变式训练　已知 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，$\cos\beta=-\frac{2}{3}$，且 α，β 为同一象限角，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\sin(\alpha-\beta)$ 的值.

例 2　利用两角和与差的正弦公式计算下列各式.

(1) $\cos 57^\circ \sin 27^\circ - \sin 57^\circ \cos 27^\circ$;

(2) $\sin(36^\circ - x)\cos(54^\circ + x) + \cos(36^\circ - x)\sin(54^\circ + x)$.

点拨　本题主要考查两角和与差的正弦公式的运用.

解析　(1)原式 $= \sin 27^\circ \cos 57^\circ - \cos 27^\circ \sin 57^\circ = \sin(27^\circ - 57^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\dfrac{1}{2}$.

(2)原式 $= \sin[(36^\circ - x) + (54^\circ + x)] = \sin 90^\circ = 1$.

变式训练　计算:$\sin \dfrac{\pi}{12} - \sqrt{3}\cos \dfrac{\pi}{12}$.

规律总结

1. 两角和与差的正弦公式可概括为“正余余正符号同”,其中“符号同”指公式两边正、负号相同.

2. 已知角 α, β 的正(余)弦的值,求 $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$ 时,其一般步骤如下:

(1)利用同角三角函数的基本关系式求出 α, β 其余的三角函数的值;

(2)代入两角和与差的正(余)弦公式计算即可.

实战训练

A 组

1. $\sin 75^\circ =$ (　　).

A. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2. 计算:$\sin 49^\circ \cos 19^\circ - \cos 49^\circ \sin 19^\circ =$ (　　).

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. 化简：$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha=$(　　).

A. $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$　　B. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$　　C. $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$　　D. $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

4. 已知 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，且 α 为第二象限角，则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$(　　).

A. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　　C. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

5. 已知 $\cos\alpha\cos\beta=\sin\alpha\sin\beta$，则 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. ±1

6. 下列等式中，一定成立的是(　　).

A. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$　　B. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha-\sin\beta$

C. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$　　D. $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$

7. 已知 $\cos\alpha=\frac{1}{5}$，且 $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$的值.

8. 已知在$\triangle ABC$ 中，$\sin(B+C)=2\cos B\sin C$，判断$\triangle ABC$ 的形状.

9. 已知 $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，求 $\sin x$ 的值.

B组

1. 若 $3\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sqrt{3}\sin(\alpha+\theta)$，$\theta\in(0,2\pi)$，则 $\theta=$（　　）.

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{11\pi}{6}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

2. 证明：$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

3. 已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，求 β 的值.

4. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{5}{13}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{4}{5}$，且 $\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4}$，求 $\sin 2\alpha$ 和 $\sin 2\beta$ 的值.

6.1.3　两角和与差的正切公式

知识梳理

两角和与差的正切公式：

(1) $\tan(\alpha+\beta)=$________；

(2) $\tan(\alpha-\beta)=$________.

例题详解

例 1　已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\beta=\frac{2}{11}$，求 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值.

点拨　本题主要考查三角函数的化简求值，利用同角三角函数的基本关系式及两角和与差的正切公式求解.

解析　$\because \cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{5}$，$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$，

$$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{11}}{1+\frac{3}{4}\times\frac{2}{11}}=\frac{1}{2}.$$

变式训练　已知 $\sin\alpha=\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{3}{5}$，$\beta\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

例 2　计算：$\tan 10^\circ+\tan 35^\circ+\tan 10^\circ\tan 35^\circ$.

点拨　本题主要考查两角和的正切公式的变式.

解析　$\because \tan(10^\circ+35^\circ)=\tan 45^\circ=\dfrac{\tan 10^\circ+\tan 35^\circ}{1-\tan 10^\circ\tan 35^\circ}=1$，

$\therefore \tan 10^\circ+\tan 35^\circ=1-\tan 10^\circ\tan 35^\circ$，

$\therefore \tan 10^\circ+\tan 35^\circ+\tan 10^\circ\tan 35^\circ=1$.

变式训练　已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，证明：$(1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)=2$.

规律总结

1. 对于两角和与差的正切公式，其符号的变化规律可简记为“分子同，分母反”，即若分子为 $\tan\alpha$ 与 $\tan\beta$ 的和（差），则分母为 1 与 $\tan\alpha\tan\beta$ 的差（和）.

2. 两角和与差的正切公式的变式：$\tan\alpha\pm\tan\beta=\tan(\alpha\pm\beta)(1\mp\tan\alpha\tan\beta)$.

实战训练

A 组

1. $\tan 105^\circ=$（　　）.

A. $2+\sqrt{3}$　　B. $2-\sqrt{3}$　　C. $-2+\sqrt{3}$　　D. $-2-\sqrt{3}$

2. 若 $\tan\alpha=3$，$\tan\beta=\dfrac{4}{3}$，则 $\tan(\alpha-\beta)=$（　　）.

A. -3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. 3

3. 计算：$\dfrac{\tan 75^\circ-\tan 15^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 15^\circ}=$（　　）.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C. 1　　D. $\sqrt{3}$

4. 若 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\tan\alpha=$（　　）.

A. $-\frac{1}{3}$　　B. -3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. 3

5. 若$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\sqrt{3}$，则$\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=$（　　）.

A. $\sqrt{3}$　　B. $-\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 已知 $\tan\alpha+\tan\beta=-3\sqrt{3}$，$\tan(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$（　　）.

A. -2　　B. 2　　C. -4　　D. 4

7. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$和 $\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

8. 已知 $\tan\beta=\frac{2}{11}$，$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，求 $\tan\alpha$ 的值.

9. 已知 $\tan\alpha$，$\tan\beta$ 是方程 $x^2+5x-6=0$ 的两根，求 $\tan(\alpha+\beta)$ 的值.

B组

1. 化简：$\tan 25^\circ+\tan 35^\circ+\sqrt{3}\tan 25^\circ\tan 35^\circ$.

2. 已知 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan(\alpha+\beta)=-\sqrt{3}$，求 $\tan\beta$ 的值.

3. 已知 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，$\beta\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$，求 $\alpha+\beta$ 的值.

4. 已知点 $P\left(\sin\dfrac{3\pi}{4},\cos\dfrac{3\pi}{4}\right)$是角 α 终边上的一点，且 $\alpha\in[0,2\pi)$，求 $\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$的值.

6.2　二倍角公式

知识梳理

二倍角公式：

(1) $\sin 2\alpha=$________；

(2) $\cos 2\alpha=$________$=$________$=$________；

(3) $\tan 2\alpha=$________.

例题详解

例 1　已知 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\tan 2\alpha$ 的值.

点拨　本题主要考查同角三角函数的基本关系式和二倍角公式的计算.