第一章 Chapter 1

随机事件及其概率

概率论与数理统计是从数量化的角度来研究现实世界中一类不确定现象(随机现象)规律性的一门应用数学学科,20 世纪以来,广泛应用于工业、国防、国民经济及工程技术等各个领域. 本章主要介绍随机事件及其概率,它是概率论中最基本、最重要的概念之一.

1.1　随机事件

1. 随机现象

自然界与人类社会中存在和发生的各种现象，大致可归结为两类：一类称为确定性现象，即条件完全决定结果的现象. 如在标准大气压下，水被加热到 100 ℃时一定沸腾. 另一类称为随机现象，即条件不能完全决定结果的现象. 如掷一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能出现反面；从一批产品中任取 1 件产品，可能是合格品，也可能是次品.

对于随机现象，在少数几次试验或观察中其结果是无规律性的，但通过长期观察或大量的重复试验可以看出试验的结果呈现出一种规律性，这种规律性称为**统计规律性**，它是随机现象自身所具有的特征. 概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，它被广泛应用于自然科学、社会科学的许多领域.

2. 随机试验

为了深入研究随机现象，就必须在一定的条件下对它进行多次观察. 若把一次观察视为一次试验，观测到的结果就是试验结果. 概率论中把满足下列特点的试验称为**随机试验**，简称**试验**.

(1)可以在相同的条件下重复进行；

(2)有多种可能结果，且知道试验可能出现的全部结果；

(3)试验前不能确定会出现哪种结果.

若无特别声明，本书以后所指的试验，均指随机试验. 例如：

(E_1) 在一定的条件下进行射击练习，考虑中靶的环数；

(E_2) 掷一枚质地均匀的硬币，观察所出现的面；

(E_3) 记录某汽车站某时段内候车的人数；

(E_4) 测试某种灯泡的寿命；

(E_5) 记录电话交换台在单位时间内收到的呼唤次数；

(E_6) 抛掷一颗质地均匀的骰子，观察骰子出现的点数.

不难看出，这 6 个例子都满足随机试验的上述 3 个特征，它们均为随机试验.

3. 样本空间

我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示. Ω 中的元素，即 E 的每一个可能结果，称为**样本点**，一般用 ω 表示.

例如 E_2 和 E_6 的样本空间分别为 $\Omega_2=\{$正面，反面$\}$和 $\Omega_6=\{1,2,3,4,5,6\}$.

样本空间的引入使得我们能用集合这一数学工具来研究随机事件. 这样一来，试验 E 的任一事件都是其样本空间的一个子集合.

4. 随机事件

在随机试验中，人们通常不仅关心某个样本点出现，更关心满足某些条件的样本点

出现，即关心试验时可能出现的某种结果. 例如，在掷骰子的试验 E_6 中，我们可能关心是否出现点数 1，也可能关注是否出现奇数点(即点数 1,3,5)等结果. 它们皆为样本空间的子集(随机试验可能出现的结果)，我们称之为**随机事件**，简称为**事件**. 随机事件通常用大写英文字母 A,B,C 或其带下标的形式 $A_1,B_2,C_k(k=1,2,\cdots)$等表示. 事件 A 在一次试验中发生，当且仅当本次试验结果 $\omega\in A$. 此外，我们称仅含一个样本点的随机事件(不能再分解的最简单的随机试验结果)为**基本事件**；由多个样本点构成的集合称为**复合事件**. 样本空间 Ω 包含所有样本点，样本点是样本空间 Ω 的一个子集. 显然在每次试验后必有 Ω 中的一个样本点出现，我们将其称为**必然事件**，仍记为 Ω. 因空集 $\varnothing$ 总是样本空间 Ω 的一个子集，空集不包含任何样本点，显然在每次试验中都不会发生，我们将其称为**不可能事件**. 很明显，必然事件与不可能事件并不具有随机性，但是为了讨论问题方便，也把它们看作特殊的随机事件.

1.2 随机事件间的关系及运算

1.2.1 随机事件间的关系和运算

在概率论中，人们往往不仅要研究随机试验的一个事件，还要研究多个事件，而这些事件之间又有一定的联系. 为了表述事件间的联系，下面定义事件间的关系和运算.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$，如图 1-1 所示.

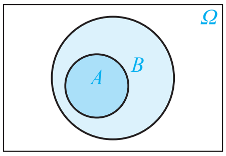

图 1-1

显然，对任何事件 A，$A\subset\Omega$. 为方便起见，规定对任何事件 A 均有 $\varnothing\subset A$.

不难验证 A、B、C 事件，若 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$. 这一性质称为包含关系的传递性.

若事件 A 所包含的基本事件与事件 B 所包含的基本事件完全相同，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$，如图 1-2 所示.

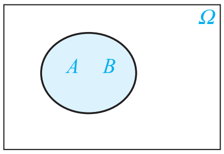

图 1-2

2. 和(并)事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生,即事件 A 发生或事件 B 发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的和(并)事件,记作 $A\cup B$(或 $A+B$),如图 1-3 所示.

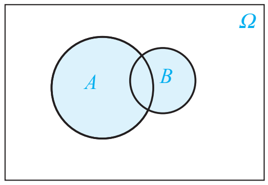

图 1-3

$A+B$ 是由所有属于事件 A 或事件 B 的基本事件组成. $A+B$ 发生当且仅当 A、B 至少有一个发生.

3. 积(交)事件

事件 A 与事件 B 同时发生,即事件 A 发生且事件 B 发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件,记作 $A\cap B$(或 AB),如图 1-4 所示.

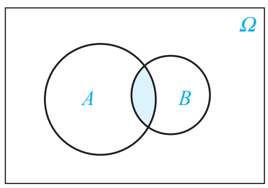

图 1-4

$A\cap B$ 是由所有属于事件 A 同时又属于事件 B 的基本事件组成. $A\cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生.

4. 差事件

事件 A 发生且事件 B 不发生,这个事件称为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$),如图 1-5 所示.

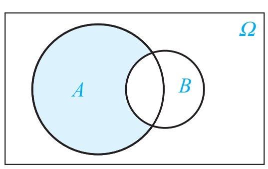

图 1-5

$A-B$ 是由所有属于事件 A 但不属于事件 B 的基本事件组成. $A-B$ 发生当且仅当 A 发生且 B 不发生.

5. 互斥关系(互不相容)

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,则称事件 A 与事件 B 互斥,或称事件 A 与事件 B 互不相容,记作 $A\cap B=\varnothing$,如图 1-6 所示.

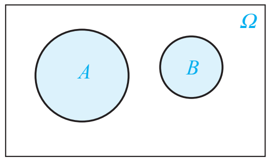

图 1-6

互斥的两个事件不含有共同的基本事件,基本事件间是互斥的,不可能事件与任何事件都是互斥的.

6. 对立(逆)事件

对于事件 A,若事件 $\overline{A}$ 满足 $A\cup\overline{A}=\Omega$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$,则把事件 $\overline{A}$ 称为事件 A 的对立事件,如图 1-7 所示.

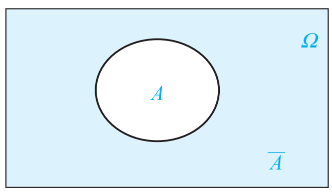

图 1-7

$\overline{A}$ 是由 Ω 中所有不属于 A 的基本事件组成,若 A 发生,则 $\overline{A}$ 必不发生,反之亦然. 事件 A,$\overline{A}$ 对立,意味着在任何一次试验中,A,$\overline{A}$ 不可能同时发生且恰好有一个发生.

显然对立事件一定是互斥的,但互斥的事件却不一定是对立的.

1.2.2 随机事件间的关系和运算的性质

当将事件看作集合时,上述 6 种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致(见表 1-1). 例如,积事件 $A\cap B$ 是由那些既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合. A 与 B 互不相容则意味着构成 A 的样本点的集合与构成 B 的样本点的集合没有公共元素.

事件的和、积运算及互不相容关系可以推广到有限个事件及可列无穷多个事件的情形.

(1) $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$,

$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots=\{$可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$中至少有一个发生$\}$;

表 1-1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	逆事件	A 的补集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少一个发生(和事件)	A 与 B 的和(并)集
$A\cap B$	事件 A,B 同时发生(积事件)	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生(差事件)	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A,B 互不相容	A 与 B 无公共元素

(2) $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生$\}$,

$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k\cap\cdots=\{$可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$同时发生$\}$;

(3) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$互不相容$\Leftrightarrow$事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$两两互不相容.

例如在 E_5 中,设 $A_k=\{$恰接到 k 次呼唤$\}(k=0,1,\cdots)$,$B_k=\{$接到的呼唤不多于 k 次$\}$,则 $\bigcup\limits_{k=6}^{\infty}A_k=\{$至少有 6 次呼唤$\}$,$\bigcap\limits_{k=3}^{\infty}B_k=B_3$. 事件 $A_0,A_1,\cdots,A_k,\cdots$是互不相容的.

事实上,任何试验的基本事件都是互不相容的. 对互不相容的事件求和时,常将"$\cup$"号换成"+"号. 例如 E_5 中

$$\bigcup_{k=0}^{10}A_k=A_1+A_2+\cdots+A_{10}=\sum_{k=1}^{10}A_k.$$

如同集合运算规律一样,事件间的运算满足下列规律:

(1) 交换律:　$A\cup B=B\cup A;A\cap B=B\cap A.$

(2) 结合律:　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

(3) 分配律:　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C);$

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$

(4) 对偶律(德摩根律):$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B};$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k;$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

典型例题

【例 1】 将两颗质地均匀的骰子各掷一次，若以(x,y)表示其结果，其中 x 表示第一颗骰子出现的点数，y 表示第二颗骰子出现的点数，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y)\mid x,y=1,2,3,4,5,6\}$$

若以 A,B,C,D 分别表示事件“点数之和等于 2”“点数之和等于 5”“点数之和超过 9”“点数之和不小于 4 也不超过 6”. 试写出事件 A,B,C,D 包含的结果.

【解】 $A=\{(1,1)\}$；

$B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$；

$C=\{(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$；

$D=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$.

典型例题

【例 2】 设 A,B,C 为三个随机事件，试表示以下事件：

(1) A,B,C 都发生；

(2) A,B 发生但 C 不发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 中至少有一个发生.

【解】 (1) A,B,C 都发生可表示为 ABC；

(2) A,B 发生但 C 不发生可表示为 $AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) A,B,C 都不发生可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) A,B,C 中至少有一个发生可表示为 $A\cup B\cup C$.

1.3 随机事件的概率

对于随机试验，我们不仅关心它可能出现哪些结果(事件)，更重要的是要研究各种结果(事件)发生的可能性大小. 在初、高中时我们已初步知道，对于随机事件 A，用数值 $P(A)$表示其发生的可能性大小，并称此数值 $P(A)$为随机事件 A 的概率. 下面我们给出概率的古典定义和统计定义，并研究概率的性质.

1.3.1 概率的古典定义

古典概率模型简称**古典概型**，通常是指具有下列两个特征的随机试验模型.

(1) 随机试验只有有限个可能的结果，即有限个样本点(有限性)；

(2) 每一个样本点发生的可能性相等(等可能性).

古典概型又称为**等可能性概型.** 在概率论产生和发展的过程中，它是最早的研究对象，在实际应用中它也是最常用的一种概率模型.

对于古典概型，以 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$ 表示样本空间，$\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示样本点，对于任一随机事件 $A=\{\omega_{i1},\cdots,\omega_{im}\}$，下面给出古典概型的定义.

定义 1.1(概率的古典概型定义)

对于给定的古典概型，若样本空间中有 n 个样本点，事件 A 含有 m 个样本点，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所含样本点的个数}}$$

性质 1.1(古典概率的性质)

(1) 对于任意事件 A，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

典型例题

【例 1】 某种产品共有 30 件，其中含正品 23 件，次品 7 件，从中任取 5 件，试求被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品的概率.

【解】 设 A=“被取出的 5 件中恰好有 2 件是次品”. 由题设“从中任取 5 件”应理解为“一次取出 5 件”，故样本点总数 $n=\mathrm{C}_{30}^5$. 事件 A 包含的样本点数 $m=\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3$，则所求概率为

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_7^2\mathrm{C}_{23}^3}{\mathrm{C}_{30}^5}=0.261\ 0$$

典型例题

【例 2】 一批同类产品共 N 件，其中次品 M 件. 现从中随机抽取 n 件(取后不放回)，问这 n 件中恰有 $k(k\leqslant M)$ 件次品的概率是多少？

【解】 设 $A=\{$恰取到 k 件次品$\}$，由于 A 并不涉及抽取产品的次序，故可将试验设想成从 N 件编上号的产品中一次取出 n 件，每一种取法构成一个基本事件，总共有 C_N^n 种取法，A 发生意味着取到 k 件次品和 $n-k$ 件合格品，则取出 k 件次品和 $n-k$ 件合格品的取法分别为 C_M^k 及 C_{N-M}^{n-k} 种. 由乘法原理，构成 A 的基本事件数为 $\mathrm{C}_M^k\cdot\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}$，故

$$P(A)=\frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

典型例题

【例 3】 某口袋中有 6 只球，其中 4 只白球，2 只红球，从袋中取球两次，每次随机地取一只，考虑两种取球方式.

① 第一次取一只球，观察其颜色后放回袋中，搅匀后再取一球，这种取球方式叫做有放回取球.

② 第一次取一只球不放回袋中，第二次从剩余的球中再取一只球，这种取球方式叫做无放回取球.

试分别就上面两种情况求：

(1) 取到的两只球都是白球的概率；

(2) 取到的两只球颜色相同的概率.

【解】 (1) 令 A_1 表示事件“取到的两只球都是白球”，则

有放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$，

无放回取球：$P(A_1)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$；

(2) 令 A_2 表示事件“取到的两只球颜色相同”，则

有放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$，

无放回取球：$P(A_2)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{7}{15}$.

典型例题

【例 4】 袋中有除颜色外其余都相同的 a 只白球、b 只红球，依次将球一只只摸出，不放回. 求第 k 次摸到白球的概率($1\leqslant k\leqslant a+b$).

【解】 设 $A=\{$第 k 次摸到白球$\}$，由于并不关心第 k 次以后的取球结果，可设想将球编号，一只只抽取直至取出第 k 只球为止. 则基本事件总数是从 $a+b$ 只编上号的球中选出 k 只球进行排列的排列种数，即 $n=A_{a+b}^k$，A 发生意味着第 k 次取到白球. 此白球可能是 a 只白球中的任一只；而前 $k-1$ 次取的球则可能是除此白球之外的其余 $a+b-1$ 只中的任 $k-1$ 只，故由乘法原理得，$m=A_a^1\cdot A_{a+b-1}^{k-1}$. 所以

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k}$$
$$=\frac{a\cdot(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-k+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}$$
$$=\frac{a}{a+b}$$

对本题也可给出另一种解法. 设想将 $a+b$ 只球编上号，每次试验将 $a+b$ 只球逐一摸出并依次排列在 $a+b$ 个位置上，则基本事件总数为 $n=(a+b)!$，$k_A=A_a^1\cdot(a+b-1)!$，故有

$$P(A)=\frac{(a+b-1)!\ a}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

注意到 $P(A)$ 与 k 无关，即无论第几次摸球，摸到白球的概率都是$\frac{a}{a+b}$. 这一结果表明抽签、摸彩与先后次序无关，机会是均等的.

典型例题

【例 5】 有 n 个人，每个人都以同样的概率$\frac{1}{N}$被分配在 $N(n\leqslant N)$间房中的任一间中，试求下列各事件的概率.

(1) 某指定的 n 间房中各有一人；

(2) 恰有 n 间房，其中各有一人；

(3) 某指定的一间房中恰有 $m(m\leqslant n)$人.

【解】 先求样本空间中所含样本点的个数.

首先，把 n 个人分到 N 间房中去共有 N^n 种分法；其次，求每种情形下事件所含的样本点个数.

(1) 某指定的 n 间房中各有一人，所含样本点的个数，即可能的分法为 $A_n^n=n!$；

(2) 恰有 n 间房中各有一人，所有可能的分法为 $C_N^n\cdot n!$；

(3) 某指定的一间房中恰有 m 人，可能的分法为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$.

于是可以得到三种情形下事件的概率分别如下：

(1) $\frac{n!}{N^n}$；

(2) $\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$；

(3) $\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$.

在上述分房问题中，若令 $N=365$，$n=30$，$m=2$ 则可演化为生日问题.

全班有学生 30 人，求下列事件的概率.

(1) 某月指定为 30 天，每位学生生日各占一天；

(2) 全班学生生日各不相同；

(3) 全年某天，恰有两个学生同一天出生.

利用上述结论可得到概率分别如下：

(1) $\dfrac{30!}{365^{30}}$；

(2) $\dfrac{C_{365}^{30}\cdot 30!}{365^{30}}$；

(3) $\dfrac{C_{30}^{2}364^{28}}{365^{30}}$.

1.3.2 概率的统计定义

为得到概率的统计定义，首先引入频率的概念. 频率描述了事件发生的频繁程度.

定义 1.2(频率的定义) 若在同一组条件下将试验 E 重复 N 次，事件 A 发生了 m 次，则称比值$\dfrac{m}{N}$为事件 A 在 N 次重复试验中发生的**频率**，记为 $f_N(A)$，即

$$f_N(A)=\frac{m}{N}$$

人们在实践中发现，当重复试验次数 N 较大时，事件发生的频率往往可以大致反映出事件发生的可能性大小. 为了解决更一般场合(如等可能性不成立)下概率的定义与计算问题，历史上许多人做了大量的实验来研究频率(表 1-2 记录了部分抛掷硬币的实验结果)，发现频率具有稳定性：当 N 很大时，频率值 $f_N(A)$会在某个常值附近摆动，而随着试验次数 N 的增大，这种摆动幅度会越来越小. 这个常值当然不可能是别的什么值，它是 A 发生的概率 $P(A)$.

频率的稳定性为人们用当 N 很大时的频率值近似地作为概率值提供了依据，由此，也得到了历史上第一个概率的一般定义.

定义 1.3(概率的统计定义) 在观察某一随机事件 A 的随机试验中，随着试验次数 n 的增大，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$会越来越稳定地在某一常数 p 附近摆动，这时就以常数 p 作为事件 A 的**概率**，并称其为统计概率，记作 $P(A)=p$.

表 1-2

人名	抛掷次数(n)	出现正面次数	频率 $f_N(A)$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
费　勒	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维　尼	30 000	14 994	0.499 8

由频率和概率的统计定义，可以得到统计概率的性质：

（1）非负性：　　　　$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

（2）规范性：　　　　$P(\Omega)=1$；

（3）有限可加性：若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互不相容，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$.

典型例题

【例 6】 某市卫生管理部门对该市 60 岁以上老人患高血压的情况进行调查，从 4 个区各分别调查了 80 人，90 人，100 人，100 人，其中患病人数分别为 23，27，33，30，试估计该市 60 岁以上老人高血压的患病率 p.

【解】 以 4 组调查结果频率的平均值来估计 p，结果为

$$p=\frac{1}{4}\left(\frac{23}{80}+\frac{27}{90}+\frac{33}{100}+\frac{30}{100}\right)\approx 0.3044$$

1.3.3　概率的性质

根据随机事件概率的定义，可得到随机事件的概率具有以下性质：

性质 1　$P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为零.

证明　$\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\varnothing+\cdots$

$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$

因此，$P(\varnothing)=0$.

性质 2　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则

$$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

证明　$A_1+A_2+\cdots+A_m=A_1+A_2+\cdots+A_m+\varnothing+\varnothing+\cdots$

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+\cdots+A_m)&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)+P(\varnothing)+\cdots\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_m)\end{aligned}$$

性质 3　$P(\overline{A})=1-P(A)$.

证明　由于 $A+\overline{A}=\Omega$，$P(A)+P(\overline{A})=1$，故 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4　若 $B\subset A$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，且 $P(B)\leqslant P(A)$.

证明　由于 $A=AB+(A-B)$，所以 $P(A)=P(AB)+P(A-B)$，

若 $B\subset A$，则 $AB=B$，故 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

此外，注意到 $P(A-B)\geqslant 0$，故在 $B\subset A$ 下，有 $P(B)\leqslant P(A)$.

性质 5　对于任意事件 A,B，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

证明　$A\cup B=A\cup(B-AB)$，且 $A(B-AB)=\varnothing$，则

$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$

chapter 01
chapter 02
chapter 03
chapter 04
chapter 05
chapter 06
chapter 07
answers
appendix

典型例题

【例 7】 设有 100 件产品,其中有 95 件合格品,5 件次品,从中任取 5 件,试求其中至少有一件次品的概率.

【解法 1】 设 A_k 表示"5 件产品中有 k 件次品",这里 $k=0,1,2,3,4,5$;A 表示"其中至少有一件次品",则 $A=\sum_{k=1}^{5}A_k$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_5$ 互不相容,$P(A_k)=\dfrac{C_5^kC_{95}^{5-k}}{C_{100}^5}(1\leqslant k\leqslant 5)$.于是,由性质 2 可得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{5}P(A_k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{C_5^kC_{95}^{5-k}}{C_{100}^5}\approx 0.230\ 4$$

【解法 2】 事件 A 比较复杂,而其对立事件 $\overline{A}=A_0$ 则比较简单,且 $P(A_0)=\dfrac{C_{95}^5}{C_{100}^5}\approx 0.769\ 6$.于是,由性质 3 可得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(A_0)\approx 1-0.769\ 6=0.230\ 4$$

第 2 种解法显示了对立事件概率的性质在计算事件概率时的作用.一般地,当所求概率的事件较复杂时,常常考虑先求出其对立事件的概率.

典型例题

【例 8】 袋中有红、黄、白色球各一个,每次任取一个,有放回地取三次,求"取到的三球里没有红球或没有黄球"的概率.

【解】 设 $A=\{$没有红球$\}$,$B=\{$没有黄球$\}$,$C=\{$没有红球或没有黄球$\}$,则 $C=A\cup B$,故

$$\begin{aligned}P(C)&=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=\frac{2^3}{3^3}+\frac{2^3}{3^3}-\frac{1^3}{3^3}=\frac{8+8-1}{27}=\frac{15}{27}=\frac{5}{9}\end{aligned}$$

典型例题

【例 9】 设事件 A,B 的概率分别为 $\dfrac{1}{3}$ 和 $\dfrac{1}{2}$,求下列条件下事件 $\overline{A}B$ 的概率.

(1) $A\subset B$; (2) $P(AB)=\dfrac{1}{4}$; (3) A,B 互斥.

【解】 (1)因为 $A\subset B$,所以 $\overline{A}B=B-A$,故由概率的性质 4 有

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

(2) 因为$\overline{A}B=B-A=B-AB$,故由概率的性质 4 有

$$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(3) 因为 A,B 互斥,故$\overline{A}B=B$,于是

$$P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2}$$

1.4　条件概率

1.4.1　条件概率

前面讨论了一个事件 A 的概率 $P(A)$的计算.但在实际生活中,常常需要求在事件 B 已发生的条件下事件 A 发生的概率,我们记为 $P(A|B)$.一般来说,这两个概率是不同的.

典型例题

【例 1】 考虑有两个孩子的家庭(假定男、女出生率相同).

设$A=\{$一男一女$\}=\{$(男,女),(女,男)$\}$;

$B=\{$至少有一女$\}=\{$(女,女),(男,女),(女,男)$\}$.

则 $\Omega=\{$(男,男),(男,女),(女,女),(女,男)$\}$,

$$P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{3}{4},P(AB)=\frac{2}{4}$$

现在考虑:已知事件 B 发生的条件下,A 发生的概率,则

$$P(A|B)=\frac{2}{3}=\frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{P(AB)}{P(B)},\text{即 } P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

定义 1.4 设 A,B 为试验 E 的两个事件,且 $P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的概率,简称**条件概率**.

条件概率具有以下性质:

(1) 若 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0$,则 $0\leqslant P(A|B)\leqslant 1$;

(2) 若 $P(B)>0$,则 $P(\Omega|B)=1$,$P(\varnothing|B)=0$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,$P(B)>0$,则

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i \mid B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$$

(4) 若 $P(B)>0$,则 $P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)$.

典型例题

【例 2】 设某种动物由出生算起活 10 年以上的概率为 0.9,活 20 年以上的概率为0.3,现有一只 10 岁的这种动物,问它能活 20 岁以上的概率是多少?

【解】 设 A={能活 10 年以上},B={能活 20 年以上},依题意,$P(A)=0.9$,$P(B)=0.3$.由于 $B\subset A$,所以 $AB=B$.因此 $P(AB)=P(B)=0.3$.于是

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{1}{3}$$

1.4.2 乘法公式

若已知 $P(B)$,$P(A|B)$,也可以求 $P(AB)$.这就是概率的乘法公式.

定理 1.1 设 $P(B)>0$,则有

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B) \tag{1-1}$$

设 $P(A)>0$,则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A) \tag{1-2}$$

(1-1)式、(1-2)式称为概率的**乘法公式**.

概率的乘法公式可以推广到任意 n 个事件的情形.

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

典型例题

【例 3】 从含有 3 只次品的 10 只产品中无放回地取 2 次,每次任取一只.(1) 求 2 次都取到正品的概率;(2) 求第 2 次才取到正品的概率.

【解】 设 A_i={第 i 次取到正品}$(i=1,2)$,B={两次都取到正品},C={第 2 次才取到正品}.

(1) 显然有 $B=A_1A_2$,依题意有

$$P(A_1)=\frac{C_7^1}{C_{10}^1}=\frac{7}{10},P(A_2|A_1)=\frac{C_6^1}{C_9^1}=\frac{2}{3}$$

故

$$P(B)=P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)=\frac{7}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$$

(2) “第 2 次才取到正品”也即“第一次取到次品而第 2 次取到正品”,即 $C=\overline{A}_1A_2$

故 $$P(C)=P(\overline{A}_1A_2)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}\cdot\frac{C_7^1}{C_9^1}=\frac{7}{30}$$

典型例题

【例 4】 设有甲、乙、丙三个小朋友，甲得病的概率是 0.05，在甲得病的条件下乙得病的概率是 0.40，在甲、乙两人均得病的条件下丙得病的条件概率是 0.80，试求甲、乙、丙三人均得病的概率.

【解】 用 A 表示“甲得病”，B 表示“乙得病”，C 表示“丙得病”，则

$$P(A)=0.05,P(B|A)=0.4,P(C|AB)=0.8$$

所求概率为

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB)=0.05\times0.4\times0.8=0.016$$

1.4.3　全概率公式

定理 1.2(全概率公式) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$（n 有限或无限）是两两互不相容的事件，$P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，事件 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，则对于事件 B，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i) \tag{1-3}$$

(1-3)式称为**全概率公式**.

证明 因为 $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$

所以 $$B=B(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i$$

且 $$BA_i\cap BA_j=\varnothing\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$$

由 $P(A_i)>0$ 知 $P(B|A_i)$ 存在，故由概率的有限可加性及乘法公式，有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(BA_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

典型例题

【例 5】 有一批产品，其中甲车间占 60%，乙车间占 40%，甲车间产品的合格率是 95%，乙车间产品的合格率是 90%，求从这批产品中随机抽取一件为合格品的概率.

【解】 设 A=“抽取的一件是甲车间产品”，则$\overline{A}$=“抽取的一件是乙车间产品”. 又设 B=“抽取的一件是合格品”，依题意有

$$P(A)=60\%, P(\overline{A})=40\%, P(B|A)=95\%, P(B|\overline{A})=90\%$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=0.6\times0.95+0.4\times0.90=0.93\end{aligned}$$

1.4.4 贝叶斯公式

定理 1.3(贝叶斯公式) 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(n 有限或无限)是两两不相容的事件,$P(A_i)>0, i=1,2,\cdots,n$,事件 $B\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$,则有

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B \mid A_j)} \tag{1-4}$$

(1-4)式称为**贝叶斯**(Bayes)**公式**(或逆概率公式,后验概率公式),它是由英国科学家贝叶斯建立的.

$P(A_i|B)$是在试验得到结果"B 发生"后求得的关于 A_i 的概率,我们称 $P(A_i)$为**先验概率**,$P(A_i|B)$为**后验概率**.

贝叶斯公式具有非常广泛的应用.

典型例题

【例 6】 在例 5 中,如果从这批产品中随机抽取一件发现是合格品,求这件合格品是甲车间生产的概率.

【解】 由题意得,要求的概率为 $P(A|B)$,由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}\\&=\frac{0.6\times0.95}{0.6\times0.95+0.4\times0.90}\approx0.613\end{aligned}$$

典型例题

【例 7】 四位工人生产同一种零件,产量分别占总产量的 35%、30%、20%和 15%,且四个人生产产品的不合格率分别为 2%、3%、4%和 5%. 今从这批产品中任取一件,问:(1)它是不合格品的概率;(2)发现是不合格品,它是由第一个人生产的概率.

【解】 设 B="任取一件产品为不合格品",A_i="任取一件产品是第 i 个人生产的产品"($i=1,2,3,4$),则

$$P(A_1)=0.35, P(A_2)=0.30, P(A_3)=0.20, P(A_4)=0.15,$$

$$P(B|A_1)=0.02, P(B|A_2)=0.03, P(B|A_3)=0.04, P(B|A_4)=0.05$$

于是

(1) 由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i) \\ &= 0.35 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.20 \times 0.04 + 0.15 \times 0.05 \\ &= 0.0315 \end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i)} = \frac{0.35 \times 0.02}{0.0315} \approx 0.222$$

1.5 事件的独立性

1.5.1 相互独立事件

一般情况下，条件概率 $P(B|A)$ 与 $P(B)$ 是不同的，但在某些特殊情况下，条件概率 $P(B|A)$ 等于无条件概率 $P(B)$，这时事件 A 发生与否不影响事件 B 的概率. 这表明事件 A 与事件 B 之间存在某种独立性.

定义 1.5 设 A 与 B 为两事件，若

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)$$

成立，则称事件 A 与事件 B 相互独立.

由定义 1.5，可以推出如下定理和性质成立.

定理 1.4 设 A，B 为两事件，且 $P(A)>0$，则 A 与 B 相互独立的充要条件是

$$P(B|A)=P(B)$$

证明 设 A，B 相互独立，即 $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)}=P(B)$$

反之，设 $P(B|A)=P(B)$，则

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B|A)=P(A) \cdot P(B)$$

显然，当 $P(B)>0$ 时，定理 1.4 中的充要条件可改为 $P(A|B)=P(A)$. 而当 $P(A)$、$P(B)$ 至少有一个为零时，由 $AB \subset A$ 及 $AB \subset B$ 易知，此时仍有 $P(AB)=P(A) \cdot P(B)$ 成立. 这表明，概率为零的事件与任一事件相互独立.

性质 1.2 (1) 不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件独立；

(2) 若事件 A，B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 分别相互独立.

chapter 01
chapter 02
chapter 03
chapter 04
chapter 05
chapter 06
chapter 07
answers
appendix

证明 (1) 是显然成立的;

(2) 由于 $A=AB+A\overline{B}$,则

$$P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$$

由 A 与 B 的独立性,知

$$P(A)=P(A)\cdot P(B)+P(A\overline{B})$$

则

$$\begin{aligned}P(A\overline{B})&=P(A)-P(A)\cdot P(B)\\&=P(A)[1-P(B)]=P(A)\cdot P(\overline{B})\end{aligned}$$

从而 A 与$\overline{B}$相互独立,类似可证明其他结论.

下面给出三个事件独立性的定义.

定义 1.6 对于随机事件 A_1,A_2,A_3,若下列 4 个等式成立,则称 A_1,A_2,A_3 是相互独立的.

$$\left.\begin{aligned}P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)\\P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)\\P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3)\end{aligned}\right\}\tag{1-5}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\tag{1-6}$$

若前三个等式成立,即式 1-5 成立,则称 A_1,A_2,A_3 是两两独立的.

上述三个事件相互独立的定义中要求 4 个等式同时成立,缺一不可,下列例子说明了这一点.

典型例题

【例 1】 若有一个均匀正八面体,其 1、2、3、4 面被染成了红色,1、2、3、5 面被染成了白色,1、6、7、8 面被染成了黑色,用 A,B,C 表示投掷一次正八面体出现红、白、黑色的事件,则

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(ABC)=\frac{1}{8}=P(A)P(B)P(C)$$

但

$$P(AB)=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A)P(B)$$

我们可以将相互独立概念推广到任意 n 个事件的情形.

定义 1.7 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$. 如果对于任意正整数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$以及 k 个整数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$,有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

从定义 1.7 不难看出，n 个事件相互独立的条件十分苛求，$C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^n=(1+1)^n-C_n^0-C_n^1=2^n-n-1$ 个等式必须同时成立. 例如，当 $n=3$ 时应有 $2^3-3-1=4$ 个等式同时成立.

而 n 个事件中两两独立的条件是 C_n^2 个式子 $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)(i\neq j;i,j=1,\cdots,n)$ 成立.

可见由多个事件相互独立可以推出它们两两独立. 反之，由多个事件两两独立不一定能推出它们相互独立.

典型例题

【例 2】 有两门高射炮独立地射击一架敌机，设甲炮击中敌机的概率为 0.8，乙炮击中敌机的概率为 0.7，试求敌机被击中的概率.

【解】 设 A 表示“甲炮击中敌机”，B 表示“乙炮击中敌机”，那么敌机被击中这一事件是 $A\cup B$. 由于 A,B 相互独立，故

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=0.8+0.7-0.8\times0.7=0.94\end{aligned}$$

典型例题

【例 3】 加工某一零件共需经过三道工序，设第一、二、三道工序的次品率分别为 2%，3%，5%，假定各道工序是互不影响的，问加工出来的零件的次品率是多少？

【解】 设 $A=\{$加工出来的零件为次品$\}$，$A_i=\{$第 i 道工序出次品$\}(i=1,2,3)$，则有 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{3}A_i$，且 A_1,A_2,A_3 相互独立，故有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\&=1-(1-0.02)(1-0.03)(1-0.05)=0.096\ 93\end{aligned}$$

典型例题

【例 4】 假设每个人血清中含有肝炎病毒的概率为 0.4%，混合 100 个人的血清，试求该血清中含有肝炎病毒的概率.

【解】 设 A_k 表示“第 k 个人血清中含有肝炎病毒”$(k=1,2,\cdots,100)$，则可以认为 A_k 相互独立，且 $P(A_k)=0.004(k=1,2,\cdots,100)$，于是所求概率为

$$P(\sum_{k=1}^{100}A_k)=1-\prod_{k=1}^{100}P(\overline{A}_k)=1-0.996^{100}\approx0.330\ 2$$

chapter 01
chapter 02
chapter 03
chapter 04
chapter 05
chapter 06
chapter 07
answers
appendix

1.5.2 独立试验序列概型

在概率论中，把在同样条件下重复进行试验的数学模型称为独立试验序列概型. 进行 n 次试验，若任何一次试验中各结果发生的可能性都不受其他各次试验结果发生情况的影响，则称这 n 次试验是相互独立的. 特别地，当每次试验只有两个可能结果时，称为 n 重伯努利试验. 例如，连续地 n 次射击，连续地抛掷 n 次硬币等都是 n 重伯努利试验概型. 关于 n 重伯努利试验概型，有如下定理.

定理 1.5 设在一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n;q=1-p)$$

证明 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 表示"事件 A 在第 i 次试验中发生"，则 $P(A_i)=p$，$P(\overline{A}_i)=1-p=q(i=1,2,\cdots,n)$. 事件 A 在其中某 k 次，如第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 次发生；在其余 $n-k$ 次，如第 $j_1,j_2,\cdots,j_{n-k}$ 次中不发生的概率为 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\overline{A}_{j_2}\cdots\overline{A}_{j_{n-k}})$.

由于诸结果相互独立，所以有

$$\begin{aligned}P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}\overline{A}_{j_1}\overline{A}_{j_2}\cdots\overline{A}_{j_{n-k}})&=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})P(\overline{A}_{j_1})P(\overline{A}_{j_2})\cdots P(\overline{A}_{j_{n-k}})\\&=\underbrace{p\cdot p\cdot\cdots\cdot p}_{k\text{个}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot\cdots\cdot q}_{n-k\text{个}}=p^kq^{n-k}\end{aligned}$$

又由于事件 A 发生的 k 次试验在 n 次试验中的位置共有 C_n^k 种，每种位置对应的事件互不相容，且由前面的计算知，概率均为 p^kq^{n-k}，因此事件 A 在 n 次试验中出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$$

典型例题

【例 5】 电灯泡使用寿命在 1 000 h 以上的概率为 0.2，试求 3 个灯泡在使用 1 000 h 后，最多有 1 个损坏的概率.

【解】 设 A 表示"灯泡在使用 1 000 h 后未损坏"，则 $P(A)=0.2$，$P(\overline{A})=0.8$；本例可以视为 3 重伯努利概型(观察一个灯泡可以视为一次试验，每次试验只有两个可能结果：A 表示"灯泡未损坏"与$\overline{A}$表示"灯泡已损坏"，且各灯泡是否损坏互不影响，因而试验相互独立). 由定理 1.5 知，所求概率为

$$P_3(2)+P_3(3)=C_3^2 0.2^2\times0.8^1+C_3^3 0.2^3\times0.8^0=0.104$$

典型例题

【例 6】 一大批某型号的电子管，已知其一级品率为 0.3，现从中随机地抽查 20 只，问其中有一级品的概率是多少?

【解】　由于这批电子管的总量很大，而抽取的只数(20 只)相对很小，故可将抽查 20 只电子管近似地看作有放回抽样. 将“抽查一只”作为一次试验，则“抽查 20 只”为 20 重伯努利概型. 设 $A=\{$其中有一级品$\}$，由伯努利公式并利用逆事件关系得

$$\begin{aligned}P(A)&=1-P(\overline{A})=1-P_{20}(0)=1-\mathrm{C}_{20}^{0}0.3^{0}\times0.7^{20}\\&=1-0.7^{20}=1-0.000\,797\,9\approx0.999\,2\end{aligned}$$

在本例中，所抽 20 只中不含一级品的概率 $P(\overline{A})=0.000\,797\,9$，不到万分之八. 实践表明，这种“概率很小的事件在一次试验中几乎不可能发生”. 这一事实称为小概率事件的实际不可能原理，它是数理统计中进行统计推断的主要依据.

典型例题

【例 7】　一个人开门，他共有 n 把钥匙，其中仅有一把钥匙能打开这扇门，他随机地选取一把钥匙开门，即每次每把以 $\frac{1}{n}$ 的概率被选中，求该人在第 k 次打开门的概率.

【解】　令 B_k 表示“第 k 次打开门”，则

$$P(B_k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}$$

习题一

1. 写出下列各随机试验的样本空间.
   (1) 10 只产品中有 3 只次品，每次从中取一只(不放回抽样)直到将 3 只次品都取出，记录抽取的次数；
   (2) 生产产品直至得到 10 件正品，记录生产产品的总件数；
   (3) 从一批灯泡中随机地选出一个灯泡，测试它的寿命；
   (4) 一口袋中有许多红色、白色、蓝色乒乓球，在其中任取 4 只，观察它们具有哪几种颜色；
   (5) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标；
   (6) 将一尺长的小木棍折成三段，观察各段的长度.
2. 若 A,B,C,D 是 4 个事件，试用这 4 个事件表示下列各事件.
   (1) 这 4 个事件至少发生一个；
   (2) 这 4 个事件恰好发生两个；
   (3) A、B 都不发生，而 C、D 都发生；
   (4) 这 4 个事件都不发生；
   (5) 这 4 个事件至多发生一个.
3. 设随机事件 A,B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别为 0.4，0.3 和 0.6，试求 $P(A\overline{B})$.

4. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}, P(AB)=0, P(AC)=P(BC)=\frac{1}{9}$，试求事件 A,B,C 全不发生的概率.
5. 袋中有 5 个乒乓球，其中 2 个是黄球，3 个是白球，今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，求第二个人取得黄球的概率.
6. 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，试求另一件也是不合格品的概率.
7. 假设每个人的生日在任何月份内是等可能的. 已知某单位中至少有一个人的生日在 1 月的概率不小于 0.96，问该单位有多少人?
8. 设某试验分两阶段进行，已知通过第一阶段试验的概率为 60%，通过第二阶段试验的概率为 40%. 试问通过第一阶段试验后再通过第二阶段试验的概率是多少?
9. 做一系列试验，每次试验成功的概率为 p，求在第 n 次成功之前恰好失败 m 次的概率.
10. 袋中有一个白球及一个黑球，一次次地从袋中取球. 如果取出白球，则除把取出的白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止. 试求取了 n 次都没有取到黑球的概率.
11. 4 个人独立地猜同一个谜语，他们能猜出的概率都是 $\frac{1}{4}$，求谜语被猜出的概率.
12. 甲、乙两名射手对同一目标各射击一次，命中率分别为 0.6 和 0.5，求：
    (1) 目标被击中的概率；
    (2) 若已知目标被击中，则甲击中目标的概率.
13. 甲、乙、丙三人射击并击中靶的概率分别为 0.5，0.6，0.8. 试求下列事件的概率：
    (1) 恰有一人中靶；
    (2) 至少有一人中靶.
14. 在三重伯努利试验中，已知事件 A 至少出现一次的概率为 $\frac{19}{27}$，试求 A 在一次试验中发生的概率 p.
15. 已知每次射击的命中率为 0.2，试问必须打多少枪才能使至少命中一次的概率不小于0.9?
16. 设 4 次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{80}{81}$，求事件 A 在一次试验中出现的概率.