

# 模块一 构件静力分析



## 模块说明

本模块包括静力分析的基本概念和定理、受力分析与受力图、平面力系的简化与合成、平面力系的平衡、考虑摩擦时的平衡问题等五个课题。



## 模块目标

1. 熟悉静力分析的基本概念和定理；
2. 能够对物体进行受力分析并画出受力图；
3. 能够利用平衡条件求出各构件所承受的未知力。



## 课题一

## 静力学的基本概念



## 学习目标

1. 了解力、力系、刚体的基本概念；
2. 掌握平衡的概念,分清静态平衡与动态平衡。



## 任务引入

生活中,任何物体都在受力的作用,而且不只一个力。以汽车车轮为例,其同时受重力、车身压力、地面支持力的作用,如果是运动中的车轮,还要受驱动力和摩擦力的作用。本课题主要讨论什么是力、力系、力矩以及力偶。



## 相关知识

### 一、力的概念

力的概念是人类在长期的生活和生产实践中由感性认识到理性认识逐步形成的抽象概念。人们用手推、拉、掷、举物体时,由于肌肉紧张收缩的感觉,产生了对力的感性认识。随着生产的发展,又进一步认识到物体机械运动状态的改变和物体形状大小的改变,都是由于其他物体对该物体施加力的结果。例如:水流冲击水轮机叶片带动发电机转子转动;起重机起吊构件;弹簧受力后伸长或缩短。

#### 1. 力的定义

力是物体间的相互作用。

力作用于物体将产生两种效果:一是使物体的机械运动状态发生变化;二是使物体的形状和尺寸发生改变。前者称为力的运动效应或外效应,后者称为力的变形效应或内效应。实际上变形也是物体受力后内部各部分运动状态变化的结果。静力学研究的对象是刚体,只研究力的运动效应。

#### 2. 力的三要素

实践表明,力对物体的作用效应完全取决于力的三要素:力的大小、力的方向和力的作用

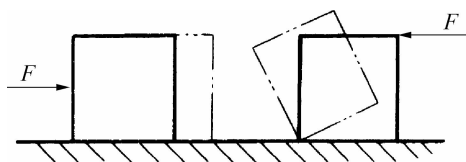


图 1-1-1 力的三要素

点。力的三要素表明,力是一个具有固定作用点的定位矢量。可以用一个矢量来表示力的三要素,如图 1-1-1 所示。矢量的长度按一定的比例表示力的大小;矢量的方向表示力的方向;矢量的始端表示力的作用点。我们常用字母“ $F$ ”表示力的矢量。

#### 3. 力的单位

在国际单位制中,力的单位为牛顿。记作“N”或“kN”。

### 二、力系的概念

所谓力系,是指作用于物体上的一群力。

根据力系中各力作用线的分布情况,可将力系分为平面力系和空间力系两大类。各力作用线位于同一平面内的力系称为平面力系;按照力系中各力作用线是否相交,力系又可分为汇交力系、平行力系和一般力系。各力作用线不在同一平面内的力系称为空间力系。

若两个力系分别作用于同一物体上时,其效应完全相同,则称这两个力系为等效力系。在特殊情况下,如果一个力与一个力系等效,则称此力为该力系的合力,而力系中的诸力称为此合力的分力。用一个简单的等效力系(或一个力)代替一个复杂力系的过程称为力系的简化。力系的简化是刚体静力学的基本问题之一。

### 三、刚体的概念

刚体是指在力的作用下不产生变形的物体,这是一个理想化的静力学模型。实际物体在力的作用下,都会产生不同程度的变形,但是这些变形很微小,对研究物体的平衡问题影响甚

微,可以忽略不计。

但不能把刚体的概念绝对化,当研究某些工程结构时(如在材料力学中),如果不考虑物体的变形,则问题将不可解。

#### 四、平衡的概念

平衡是指物体相对于地面保持静止或作匀速直线运动的状态,是物体运动的一种特殊形式。例如桥梁、建筑物、作匀速直线运动的火车等,都处于平衡状态。作用在物体上使物体处于平衡状态的力系称为平衡力系。平衡力系满足的条件称为平衡条件。力系简化的目的之一是为了导出力系的平衡条件。而力系的平衡条件是设计结构、构件和机械零件时静力计算的基础。

##### 1. 静态平衡

物体相对于地面处于静止的状态,称为静态平衡。例如:静止在地面的汽车。

##### 2. 动态平衡

物体相对于地面处于匀速直线运动状态,称为动态平衡。例如:在地面上匀速直行的汽车。



#### 思考与练习

1. 力的定义是什么? 力有哪三要素?
2. 什么是力系? 它是如何分类的?
3. 什么是刚体?
4. 平衡是一种什么状态? 分为几种情况?

## 课题二

## 静力学公理



#### 学习目标

1. 理解二力平衡的条件、加减平衡力系公理、作用力和反作用力公理;
2. 掌握力的平行四边形法则。



#### 任务引入

汽车上各部位的零件受力都十分复杂,如何来分析汽车零部件的受力情况,我们需要借助于静力学的相关理论加以分析。本课题主要介绍静力学中常用的一些公理以及推论。



相关知识

### 一、二力平衡条件

作用在刚体上的两个力,使刚体处于平衡的必要和充分条件是:这两个力的大小相等,方向相反,且作用在同一条直线上,如图 1-1-2。可表示为:

$$F_1 = -F_2$$



图 1-1-2 二力平衡

工程上受两个力作用而平衡的刚体称为“二力构件”或“二力体”。二力构件平衡时,其所受的两个力必沿着两个力作用点的连线,而且两个力大小相等,方向相反。

### 二、加减平衡力系公理

加减平衡力系公理:在已知力系上加上或减去任意的平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用。

推论:力的可传性

作用在刚体上某点的力,可以沿着它的作用线移到刚体内任意一点,并不改变该力对刚体的作用。如图 1-1-3 所示。

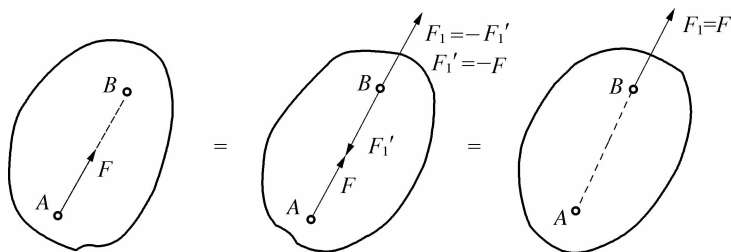


图 1-1-3 力的可传性原理

### 三、作用力和反作用力公理

作用力和反作用力总是同时存在,两力的大小相等,方向相反,沿着同一直线,分别作用在两个相互作用的物体上。如图 1-1-4 所示:  $F_N$  和  $F'_N$  为一对作用力和反作用力。

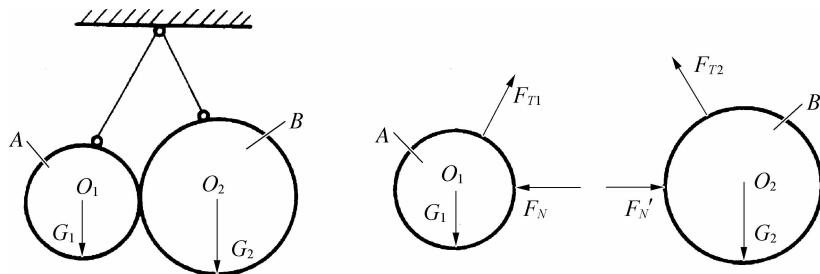


图 1-1-4 作用力与反作用力

作用力与反作用力公理揭示了自然界中物体之间相互作用的关系。所有力都是成对出现的,有作用力就必然有反作用力,任何一方都不能独立存在。这在研究物体系统的受力分析时经常要用到。

#### 四、力的平行四边形法则

作用在物体上同一点的两个力  $F_1$ 、 $F_2$ ,可以合成为一个合力。合力的作用点也在该点,合力的大小和方向,由以这两个力为边构成的平行四边形的对角线确定,如图 1-1-5 所示。

合力矢:  $F_R = F_1 + F_2$

合力  $F_R$  的大小可用余弦定理求出:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

一个力也可以分解为两个力,力的分解仍遵循力的平行四边形法则。

推论:三力平衡汇交定理

刚体受同一平面内三个互不平行的力作用而平衡时,此三个力的作用线必汇交于一点。

如图 1-1-6 所示,刚体上  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点分别作用有同平面内的不平行的力  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ ,并处于平衡状态。由力的可传性原理可得,其中两个不平行的力  $F_1$ 、 $F_2$  汇交于  $O$  点,则可用平行四边形法则将其合成得合力  $F_R$ ,只有  $F_R$  与第三个力  $F_3$  平衡,刚体才会平衡。由二力平行公理可知, $F_R$  与  $F_3$  必须等值、反向、共线,即  $F_3$  也汇交于  $O$  点。

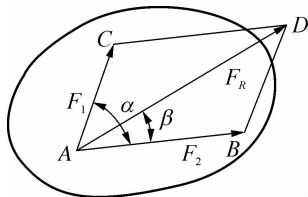


图 1-1-5 平行四边形法则

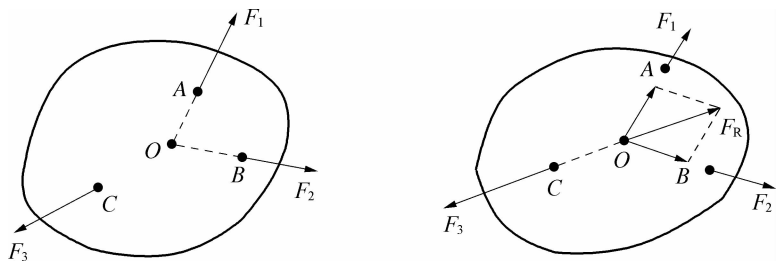


图 1-1-6 三力平衡汇交定理

该定理说明了三个不平行力平衡的必要条件,容易推广到更一般的情形:刚体受  $n$  个同平面互不平行的力作用而平衡,若其中  $n-1$  个力交于同一点,则第  $n$  个力的作用线必过此点。



#### 思考与练习

1. 刚体受两个力作用时,平衡的条件是什么?
2. 什么是力的可传性?
3. 试述作用力与反作用力公理的内容?
4. 合力与分力的关系是什么?
5. 受同一平面内互不平行力作用的刚体,其平衡条件是什么?

## 课题三 力矩与力偶

### 学习目标

了解力矩、力偶的概念及力向一点平移的结果。

### 任务引入

在汽车各部件中,很多零件属于旋转部件,或是采用了杠杆原理,为了研究这些零件的受力情况,我们就需要学习力矩以及力偶的知识。例如,驾驶员转动方向盘来控制汽车行驶的方向,驾驶员对方向盘的作用就是力偶。本课题主要介绍力矩、力偶的概念及力向一点平移的结果。

### 相关知识

#### 一、力矩

##### 1. 概念

一般说来,力对刚体有移动效应,也有使刚体绕某点转动的效应,例如用扳手紧固螺丝,如图 1-1-7 所示,力的这种转动效应的度量,叫力矩,其定义为

$$M_O(F) = \pm Fd$$

构成力矩的三要素为:矩心  $O$ 、力矢量  $F$ 、力臂  $d$ 。

##### 2. 力矩的方向

力矩正负号的规定:力使物体绕矩心逆时针转动时的力矩为正;反之为负。

力矩的值与矩心位置有关,同一力对不同的矩心,其力矩不同。力矩在下列两种情况下等于零:

- ① 力等于零。
- ② 力的作用线通过矩心,即力臂等于零。

力矩是代数量,在国际单位制中常用  $\text{N} \cdot \text{m}$ 、 $\text{kN} \cdot \text{m}$  来表示。

#### 二、力偶和力偶矩

力学上把大小相等、方向相反、作用线互相平行的两个力称为力偶,记作  $(F, F')$ 。力偶

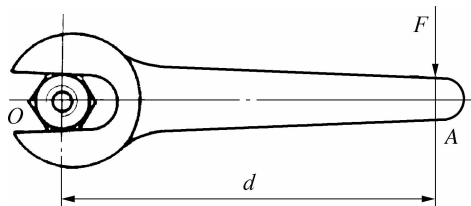


图 1-1-7 力对点之矩

中,二力作用线间的垂直距离  $d$  称为力偶臂,二力所在的平面称为力偶的作用面,如图1-1-8所示。

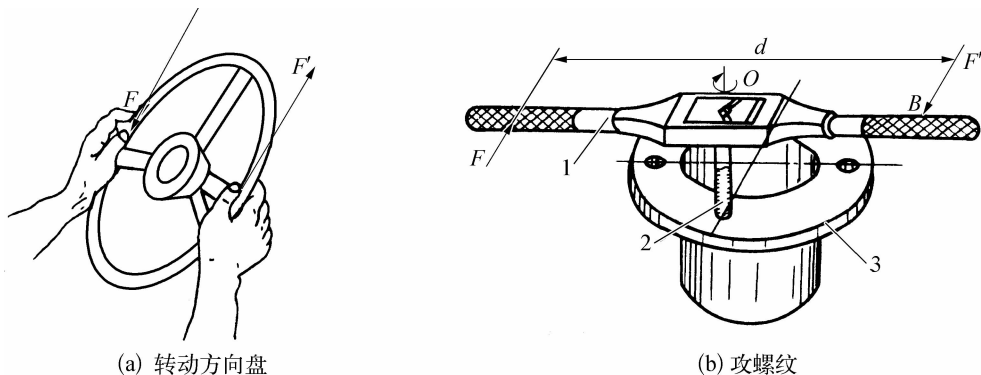


图 1-1-8 力偶应用实例

1—铰杠 2—丝锥 3—工件

力偶是两个具有特殊关系的力的组合,它既不能合成为一个力,也不能用一个力来等效替换,并且也不能由一个力来平衡,因而力偶是一个基本力学量。它只能使物体发生转动效应(纯转动)。

力偶对物体的转动效应用力偶矩来度量。力偶中力的大小与力偶臂的乘积,冠以适当的正负号,称为力偶矩,记作  $M(F, F')$  或  $M$ , 即

$$M(F, F') = \pm Fd$$

力偶方向规定: 力偶逆时针转动为正,反之为负。

力偶的单位:  $\text{N} \cdot \text{m}$  或  $\text{kN} \cdot \text{m}$

力偶的三要素: 力偶对物体的转动效应取决于力偶矩的大小、力偶的转向及力偶的作用平面。

力偶对其作用平面内任一点的矩都等于力偶矩,与矩心位置无关。经滑移和平移后,不改变对刚体的运动效应。

力偶的等效定理: 作用于同一平面内的两个力偶,如果它们的力偶矩大小相等,转向相同,则这两个力偶是等效的。

由力偶的等效定理可以得到力偶的两个性质:

① 力偶可以在其作用平面内任意移动或转动,而不改变它对物体的转动效应。即力偶对物体的转动效应与它在作用平面内的位置无关。

② 只要保持力偶矩的大小和力偶的转向不变,可同时相应地改变组成力偶的力的大小和力偶臂的长度,而不改变它对物体的转动效应。

### 三、力的平移定理

如前所述,作用在刚体上的力沿着其作用线滑移后,不改变它对刚体的作用效应;作用在刚体上的力偶在同一刚体内进行任意滑移和平移,也不影响该力偶对刚体的作用效果。那么,作用在刚体上的力能否平移? 怎样进行等效平移呢?

如图1-1-9所示,设刚体上A点作用有力  $F$ , 为将其平移至刚体上B点,而不会改变力  $F$  对刚体的效应,可根据加减平衡力系原理,在点B加上一对平衡力  $F'$  和  $F''$ , 且令

$$F = F' = -F'', F' \parallel F$$

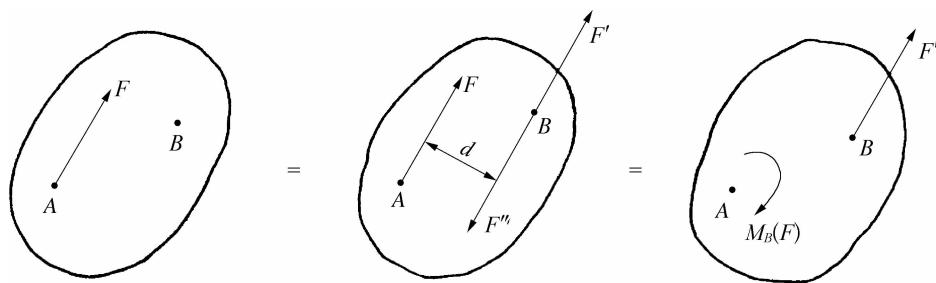


图 1-1-9 力的平移定理

显然,加上平衡力系  $F'$ 、 $F''$ 后,不会改变力  $F$  对刚体的作用效应。

此时,由于  $F''$  与  $F$  是等值、反向、作用线平行,构成一对力偶,其矩为

$$M(F, F'') = Fd = M_B(F)$$

即将力  $F$  移至  $B$  点,同时产生了一个附加力偶。由此可知,平移前的一个力与平移后的一个力及一个力偶等效。

由此可以得出力的平移定理为:将刚体上某点的力平移到刚体上的任一点后,将产生一附加力偶,其力偶矩等于该力对新作用点之矩。



### 思考与练习

1. 什么是力矩?其三要素是什么?如何计算力对点之矩?
2. 力矩和力偶的正、负是如何规定的?
3. 力偶有哪些性质?
4. 刚体上的力如何进行等效平移?

## 课题四

## 约束、约束反力与受力图的应用



### 学习目标

1. 了解约束与约束反力的概念;
2. 掌握常见约束的类型及符号;
3. 能正确画出光滑面约束、柔体约束、光滑活动铰链的约束反力;
4. 能看懂含有光滑面约束、柔体约束、光滑活动铰链等约束的物体受力分析及受力图。



## 任务引入

如下图 1-1-10 所示,是一个带传动受力图。这种带传动在很多机械传动中都可以见到。例如:在汽车发动机的动力传输,曲轴与凸轮轴、发电机等都采用了这种皮带传动。为了分析其受力情况,本课题主要介绍约束及约束反力的概念,约束的类型,受力分析图的画法和识读。

## 相关知识

### 一、约束与约束反力

工程中的机器或者机构,总是由许多零部件组成的。这些零部件是按照一定的形式相互联接。因此,它们的运动必然互相牵连和限制。如果从中取出一个物体作为研究对象,则它的运动当然也会受到与它联接或接触的周围其它物体的限制。也就是说,它是一个运动受到限制或约束的物体,称为被约束体。

那些限制物体某些运动的条件,称为约束。这些限制条件总是由被约束体周围的其它物体构成的。为方便起见,构成约束的物体常称为约束。约束限制了物体本来可能产生的某种运动,故约束有力作用于被约束体,这种力称为约束反力。

约束反力总是作用在被约束体与约束体的接触处,其方向也总是与该约束所能限制的运动或运动趋势的方向相反。

### 二、常见约束类型及约束反力的确定

#### 1. 柔体约束

由绳索、胶带、链条等形成的约束称为柔体约束。这类约束只能限制物体沿柔体伸长方向的运动,因此它对物体只有沿柔体方向的拉力,一般常用  $F_T$  表示:作用在接触点处,沿柔体方向离开受力物体。如图 1-1-10 所示的带传动,即为柔体约束。

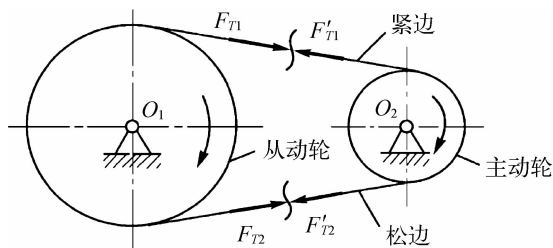


图 1-1-10 带传动

#### 2. 光滑面约束

当物体与固定约束或活动约束间的接触表面非常光滑,摩擦可以忽略不计时,就可简化为光滑面约束。它只能阻碍物体沿两接触面公法线方向往约束内部的运动,而不能阻碍沿切线方向的运动。因此,光滑面约束反力作用在接触点处,沿两接触面公法线方向,并指向受力物体,称为法向力,通常用  $F_N$  表示,如图 1-1-11 (a)、(b) 所示。

#### 3. 光滑铰链约束

用光滑销钉 C 和圆孔组成的局部结构,称为光滑圆柱铰链,如图 1-1-12(a) 所示。因忽略摩擦,销钉与圆柱孔间约束,本质上属光滑面约束,这时,销钉只能限制两物体的相对移动而不能限制它们的相对转动。工程上常见的光滑铰链有如下几种形式:

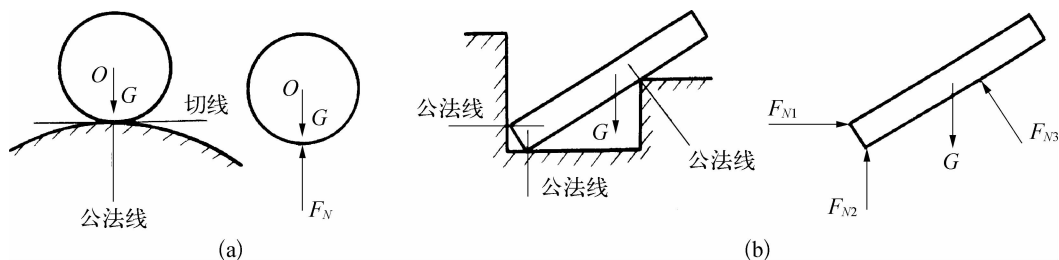


图 1-1-11 光滑面约束

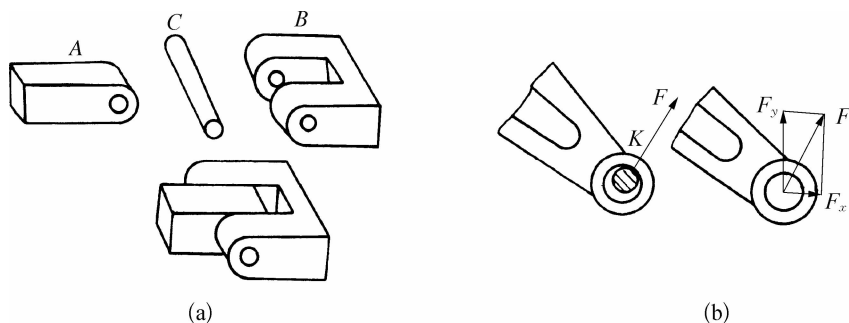


图 1-1-12 光滑铰链

(1) 中间铰链

如图 1-1-12(b)所示的结构中,销钉对零件的约束反力  $F$  沿圆柱面接触点  $K$  的公法线方向,但由于接触点  $K$  的位置会随主动力方向不同而改变,  $F$  的方向不能预先确定下来。在约束力方向没有明确指向的情况下,一般可假定用两个正交分力  $F_x$  和  $F_y$  来表示,这些分力的指向可事先任意假定,最后由计算结果的正负来确定。如汽车发动机的曲柄滑块机构中,连杆与活塞、连杆与曲柄的连接就为中间铰链,如图 1-1-13(a)、(b)所示。

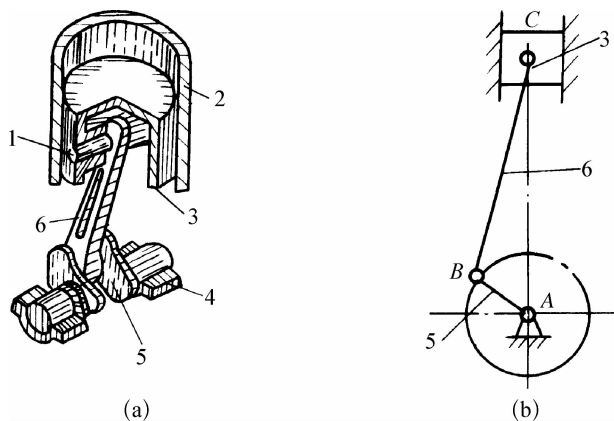


图 1-1-13 曲柄滑块机构

1—销轴,2—气缸,3—活塞,4—轴承,5—曲轴,6—连杆

(2) 固定铰链支座

如图 1-1-14(a)所示。销钉与构件的接触同样为光滑圆柱面。因此,约束反力与中间铰链类似,在未知确切方向的情况下,用经过销钉中心的两个正交分力  $F_x$  和  $F_y$  表示,如图 1-1-14(b)所示。

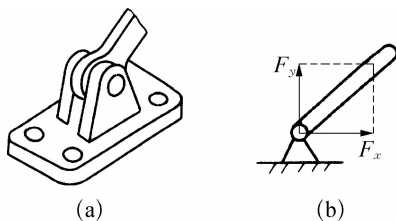


图 1-1-14 固定铰链支座

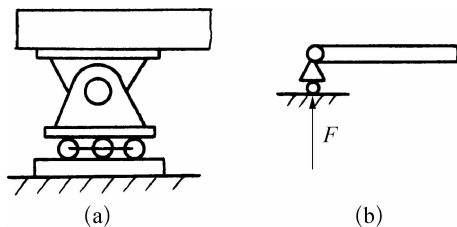


图 1-1-15 活动铰链支座

### (3) 活动铰链支座

工程上有时为了适应某些构件变形的需要,在铰链支座下面安装辊轴,成为活动铰链支座,如图 1-1-15(a)所示,此时约束只能限制构件离开和趋向支承面的运动,不能限制构件绕销钉轴线的转动以及沿支座面的移动。因此,约束反力通过销钉中心垂直于支承面指向受力物体,如图 1-1-15(b)所示。

### 4. 固定端约束

在工程实际中,常会遇到一端完全固定的工程结构,这种约束称为固定端约束。例如悬臂梁、车床卡盘对工件的约束、房屋阳台、电线杆等,这类结构虽然形式多样,但约束反力有着共同的特点,可利用力系向一点简化的方法来分析。固定端的力学模型如图 1-1-16(a)所示。

这类构件一端不能作任何移动和转动,另一端自由,在主动力  $F$  的作用下,固定端受到的约束反力的大小、方向分布杂乱,属平面任意力系,如图 1-1-16(b)所示。可将各力向  $A$  点简化,得到一个约束反力  $F_R$  和一个附加力偶  $M_A$ ,约束反力  $F_R$  在方向未知的情况下,可用两个正交分力  $F_{Rx}$ 、 $F_{Ry}$  表示,如图 1-1-16(c)所示。 $F_{Rx}$ 、 $F_{Ry}$  限制构件的移动, $M_A$  限制构件绕  $A$  点的转动。

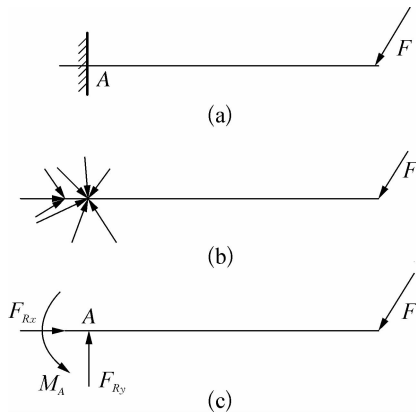


图 1-1-16 固定端约束

## 三、受力分析及画受力图

所谓受力分析,是指分析所要研究的物体(称为研究对象)上受力多少、各力作用点和方向的过程。

工程中物体的受力可分为两类,一类称为主动力,如工作载荷、构件自重、风力等,这类力一般是已知的或可以测量的;另一类就是约束反力。进行受力分析时,研究对象可以用简单线条组成的简图来表示。在简图上除去约束,使对象成为自由体,添上代表约束作用的约束反力,称为解除约束原理。解除约束后的自由物体称为分离体,在分离体上画上它所受的全部主动力和约束反力,就称为该物体的受力图。

画受力图是解决力学问题的第一步骤,正确地画出受力图是分析、解决力学问题的前提。如果没有特别说明,则物体的重力一般不计,并认为接触面都是光滑的。

画受力图的步骤如下:

- ① 根据题意,确定研究对象,取分离体并单独画出。
- ② 在分离体上画出所有主动力。
- ③ 根据约束类型正确画出相应的约束反力。

**【例 1-1】** 图 1-1-17(a)所示定滑轮系统中,定滑轮在轮心  $O$  处受到平面铰链约束,在绳子的一端施加力  $F$ ,将重力为  $G$  的物体匀速吊起。设滑轮本身重力不计,滑轮与轴之间的摩擦亦不计,试分别画出重物与滑轮的受力图。

**解:** ① 将滑轮约束解除画出分离体,作用于其上的力有主动力  $F$  和绳子的拉力  $F_T$ ,以及铰链  $O$  的约束反力  $F_x$ 、 $F_y$ 。如图 1-1-17(b)所示。

② 将重物约束解除并画出分离体,它受到的主动力是重力  $G$ 、约束反力是绳子的拉力  $F_T$  的作用,如图 1-1-17(c)所示。 $F_T$  和  $F'_T$  为作用力与反作用力关系。

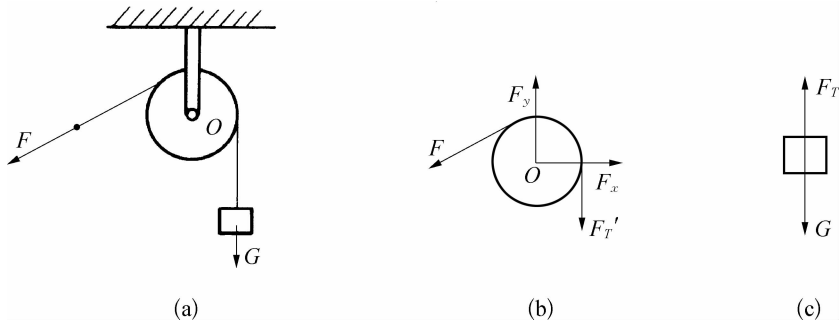


图 1-1-17 定滑轮系

**【例 1-2】** 如图 1-1-18(a)所示,重力为  $G$  的均质球  $O$ ,由杆件  $AB$ 、绳子  $BC$  和墙壁支持。设各处的摩擦及各杆的重力忽略不计,试分别画出球  $O$ 、杆件  $AB$  的受力图。

**解:** ① 以球  $O$  为研究对象,画出其分离体。

② 对球进行受力分析。球受到主动力为重力  $G$ ,方向垂直向下;杆  $AB$ 、墙壁支持力  $F_D$ 、 $F_E$  分别过球与两者的接触点  $D$ 、 $E$ ,并沿接触点处公法线指向球心,如图 1-1-18(b)所示。

③ 以杆  $AB$  为研究对象画出分离体,如图 1-1-18(c)所示。

④ 对杆  $AB$  进行受力分析。杆  $AB$  上主动力为球对它的压力  $F'_D$  (和  $F_D$  是作用力与反作用力关系),方向沿  $O$  点处公法线指向杆  $AB$ 。同时,  $B$  点受到绳子对  $AB$  杆的拉力  $F_T$ ,方向自  $B$  指向  $C$  点。  $A$  点为固定铰链约束,约束反力的方向可根据三力平衡汇交定理判定,  $F_A$  经过  $F'_D$  与  $F_T$  的交点  $P$ 。

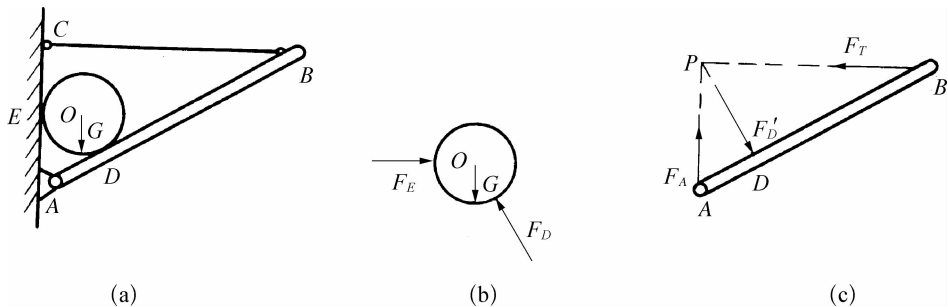


图 1-1-18 均质球支架

**【例 1-3】** 如图 1-1-19(a)所示,水平梁  $AB$  用斜杆  $CD$  支撑,  $A$ 、 $C$ 、 $D$  三处均为光滑铰链联接。均质梁重  $W_1$ ,其上放置一重为  $W_2$  的电动机。不计杆  $CD$  的自重,试分别画出杆  $CD$  和梁  $AB$  (包括电动机)的受力图。

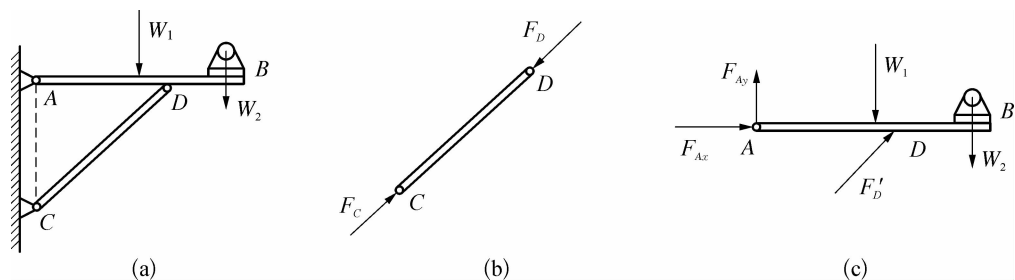


图 1-1-19 支架

**解：**① 取杆  $CD$  为研究对象 由于斜杆  $CD$  的两端为光滑铰链，自重不计，因此杆  $CD$  为二力杆，由经验判断，此处杆  $CD$  受压力，杆  $CD$  的受力如图 1-1-19(b)所示。

② 取梁  $AB$  (包括电动机) 为研究对象，它受有  $W_1$ 、 $W_2$  两个主动力的作用。梁在铰链  $D$  处受有二力杆  $CD$  给它的约束反力  $F'_D$  的作用。根据作用和反作用公理， $F'_D$  与  $F_D$  方向相反。梁受固定铰支座给它的约束反力的作用，由于方向未知，可用两个大小未定的正交分力  $F_{Ax}$  和  $F_{Ay}$  表示。梁  $AB$  的受力如图 1-1-19(c)所示。

**小结：**通过以上各例题的分析，可将画分离体和受力图应注意的问题总结如下：

① 力是物体间相互的机械作用。因此，对研究对象所受的每个力均应清楚哪个是施力物体，以免多画或漏画力。

② 分析约束反力时应严格区分约束类型，确定相应的约束反力。

③ 分析两物体间相互的机械作用时，应该注意运用作用力与反作用力定理来判断和检查。

④ 柔性体约束的约束反力只能是拉力，不会是压力。

⑤ 善于运用二力构件来帮助进行受力分析，正确运用三力平衡汇交定理。

画受力图可概括为：据要求取构件，主动力画上面；联接处解约束，先分析二力件。



### 思考与练习

1. 什么是约束和约束反力？
2. 常见的约束有哪些类型？
3. 如何正确进行刚体的受力分析？
4. 请画出一个行驶中的车轮的受力图。

## 课题五

## 平面汇交力系及平面力偶系



### 学习目标

1. 理解平面内汇交力系及力偶系的简化方法；

2. 理解平面汇交力系及力偶系平衡的条件；
3. 了解考虑摩擦时的物体平衡。

## 任务引入

汽车上很多零部件受很多力的作用,分析起来极为不方便,为此,我们想办法把物体所受到的力进行合成和简化,这就便于我们对受力物体进行力的分析了。本课题主要讲解平面汇交力系的合成和简化以及力偶及力偶系的简化。

## 相关知识

### 一、平面汇交力系的合成与简化

各力的作用线在同一平面内且相交于一点的力系称为平面汇交力系。

平面汇交力系可以由两个、三个甚至更多的汇交力组成,平面汇交力系可以合成为一个合力,由两个汇交力组成的汇交力系是最简单的汇交力系。平面汇交力系的合成和简化有几何法和解析法两种方法。

#### 1. 平面汇交力系合成的几何法

如图 1-1-20 所示,设有平面共点力系  $F_1, F_2, F_3, F_4$  作用于点  $O$ 。根据力的三角形法则,将各力依次首尾相接,最后得到一个通过汇交点  $O$  的合力  $F_R$ , 如图 1-1-21 所示,多边形  $Obcde$  称为平面汇交力系的力多边形,其封闭边  $Oe$  表示此平面汇交力系的合力的大小和方向,这种利用几何作图求合力的方法称为几何法。合力  $F_R$  可表示为  $F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = \sum F$ 。

由上述可知,平面汇交力系对刚体的作用效果可用其合力代替,显然,平面汇交力系平衡的必要和充分条件是:该力系的合力等于零。即:  $\sum F = 0$

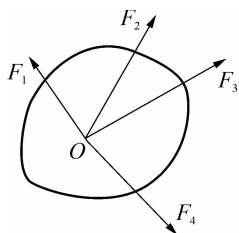


图 1-1-20 平面汇交力系

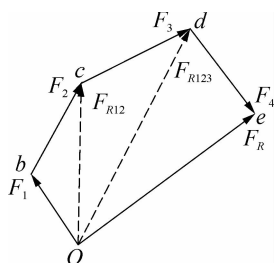


图 1-1-21 力多边形

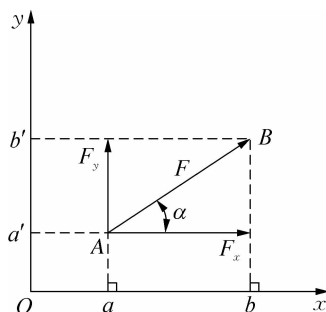


图 1-1-22 力在坐标轴上的投影

#### 2. 平面汇交力系合成的解析法

平面汇交力系的解析法是用各力在直角坐标轴上的投影来计算合力的大小和方向的。

##### (1) 力在坐标轴上的投影

设在刚体上的点  $A$  作用一力  $F$ , 如图 1-1-22 所示,该力在直角坐标系中与  $x$  轴的夹角为  $\alpha$ , 过力  $F$  的始点  $A$  和终点  $B$  分别向  $x$  轴引垂线,得到垂足  $a, b$ , 再向  $y$  轴引垂线,得到

垂足  $a'$ 、 $b'$ ，则线段  $ab$  称为合力  $F$  在  $x$  轴的投影，用  $F_x$  表示。线段  $a'b'$  为力  $F$  在  $y$  轴上的投影，用  $F_y$  表示。

力的投影正负号规定：力在坐标轴上的投影方向与坐标轴正方向一致时，力的投影为正，反之为负。

力在坐标轴上投影的大小：

$$F_x = \pm F \cos \alpha$$

$$F_y = \pm F \sin \alpha$$

合力  $F$  的大小和方向：

$$\text{合力的大小 } F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

$$\text{合力的方向 } \tan \alpha = \left| \frac{F_y}{F_x} \right|$$

### (2) 合力投影定理

合力投影定理：合力在某一轴上的投影等于各分力在同一轴上投影的代数和。

若刚体在平面上的一点  $A$  处作用着  $n$  个力  $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，如图 1-1-23 所示，按两个力合成的平行四边形法则（或三角形法则）依次类推，从而得出力系的合力等于各分力的矢量和。即

$$F_R = F_1 + F_2 + \dots + F_n = \sum F_i$$

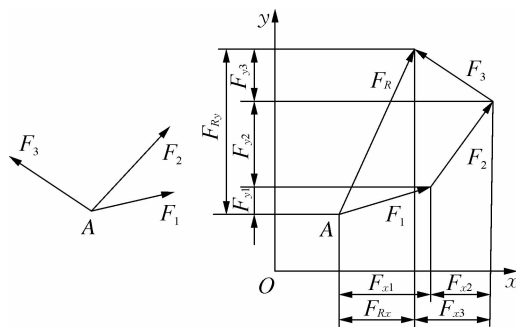


图 1-1-23 合力投影定理

一般地，合力与各分力之间有如下关系：

$$F_{Rx} = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn} = \sum F_{ix}$$

$$F_{Ry} = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn} = \sum F_{iy}$$

即：合力  $F_R$  在  $x$ 、 $y$  轴上的投影，等于各分力在同轴上投影的代数和。合力投影定理是用解析法求解平面汇交力系合成与平衡问题的理论依据。

### (3) 平面汇交力系合成的解析法

平面汇交力系合成的解析法是采用力的投影，先求得力系中所有力分别在  $x$ 、 $y$  轴上投影的代数和，即为力系合力分别在  $x$  和  $y$  轴上的投影：

$$F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix}$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy}$$

$\sum F_x$ 、 $\sum F_y$  即为合力  $F_R$  在  $x$ 、 $y$  轴上的投影。

根据公式

$$F_R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2}$$

求合力的大小。

由公式

$$\cos \alpha = \frac{F_{Rx}}{F_R}$$

$$\cos \beta = \frac{F_{Ry}}{F_R}$$

求出合力与  $x$  轴的夹角  $\alpha$  或与  $y$  轴的夹角  $\beta$ ，从而求出合力  $F_R$  的方向。

## 二、平面力偶及力偶系的简化

两个或两个以上力偶组成的力系称为力偶系。力偶系合成的结果只能是力偶而不是力，这个力偶称为合力偶。如图 1-1-24 所示。

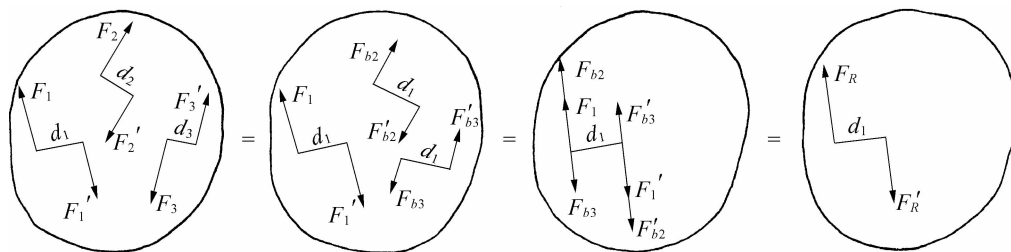


图 1-1-24 平面力偶系的合成

由上图分析可知平面力偶系可以合成为一个合力偶，合力偶的矩等于各分力偶矩的代数和。即

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

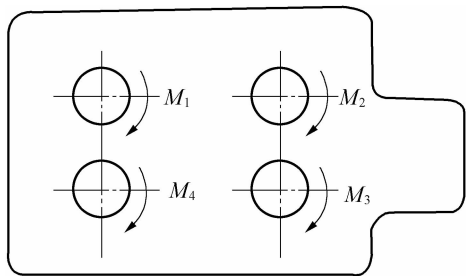


图 1-1-25 汽缸盖

**【例 1-4】** 要在汽车发动机汽缸盖上钻四个相同直径的孔，如图 1-1-25 所示。估计钻每个孔的切削力偶矩为  $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = -15 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。若用多轴钻床同时钻这四个孔时，工件受到的总切削力偶矩有多大？

**解：** 作用于汽缸盖上的四个力偶位于同一平面内，各力偶矩大小相等、转向相同，则作用在工件上的合力偶矩为

$$M = \sum M_i = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = 4 \times (-15) \text{ N} \cdot \text{m} = -60 \text{ N} \cdot \text{m}$$

即合力偶矩大小为  $-60 \text{ N} \cdot \text{m}$ ，按顺时针方向转动。

## 三、平面汇交力系的平衡方程

平面汇交力系可以合成为一个合力  $F_R$ ，要使平面汇交力系平衡的充要条件是力系的合力等于零，即



$$\sum F_{ix} = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0$$

上式说明：力系中所有各力在两个坐标轴中每一轴上投影的代数和都等于零。

#### 四、平面力偶系的平衡方程

作用在物体上同一平面内的许多力偶组成平面力偶系。平面力偶系平衡的充要条件是：力偶系中各力偶矩的代数和等于零。

即

$$\sum M_i = 0$$

**【例 1-5】** 如图 1-1-26(a) 所示的支架，在横梁  $AB$  的  $B$  端作用有一集中载荷  $F$ ， $A$ 、 $C$ 、 $D$  处均为铰链联接，忽略梁  $AB$  和撑杆  $CD$  的自重，试求铰链  $A$  的约束反力和撑杆  $CD$  所受的力。

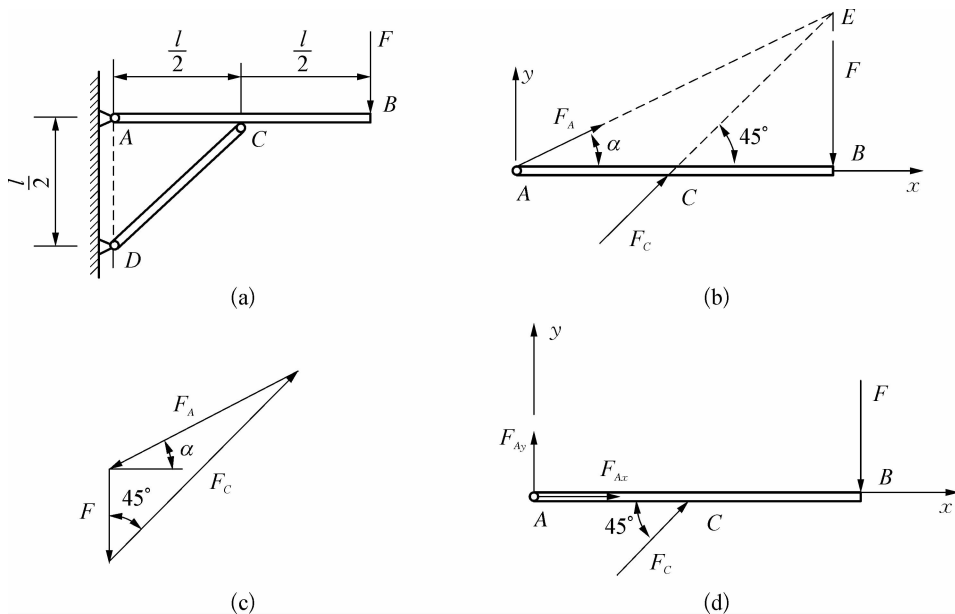


图 1-1-26 支架

解：

方法一：汇交力系方法

选取横梁  $AB$  为研究对象。横梁在  $B$  处受载荷  $F$  作用。因  $CD$  为二力杆，故它对横梁  $C$  处的约束反力  $F_C$  的作用线必沿两铰链  $C$ 、 $D$  中心的连线。如图 1-1-26(b) 所示，梁  $AB$  在  $F$ 、 $F_C$ 、 $F_A$  三力作用下处于平衡，根据三力平衡汇交定理可确定铰链  $A$  的约束反力  $F_A$  的作用线，即必通过另两力的交点  $E$ 。根据平面汇交力系的平衡条件，可求得  $F_A$  和  $F_C$ 。

由  $\tan \alpha = 0.5$  得  $\alpha = \arctan 0.5$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

方法二：用“几何法+辅助计算”求解

用这种方法进行求解时，必须预先判断各未知力的指向。当三力平衡时，这三个力应组成一封闭的力三角形，可确定  $F_A$  和  $F_C$  的指向，其中， $F_A$  如图 1-1-26(c) 所示。在力三角形中，由正弦定理

$$\frac{F_A}{\sin 45^\circ} = \frac{F_C}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{F}{\sin(45^\circ - \alpha)}$$

得

$$F_A = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ - \alpha)} F = \sqrt{5} F$$

$$F_C = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha)} F = 2\sqrt{2} F$$

方法三：用解析法求解

用这种方法进行求解时，不必预先判断各未知力的指向。如图 1-1-26(b) 所示，取投影轴，列平衡方程。

$$\sum F_x = 0 \quad F_A \cos \alpha + F_C \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A \sin \alpha + F_C \sin 45^\circ - F = 0$$

联立求解，得

$$F_A = \frac{F}{\sin \alpha - \cos \alpha} = -\sqrt{5} F$$

$$F_C = \frac{F - F_A \sin \alpha}{\sin 45^\circ} F = 2\sqrt{2} F$$

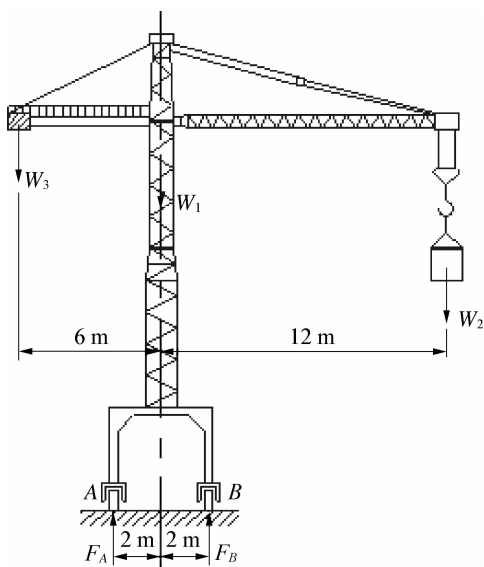


图 1-1-27 塔式起重机

$F_A$  为负值，说明其方向与所设方向相反。

**【例 1-6】** 塔式起重机如图 1-1-27 所示。机架重  $W_1 = 700 \text{ kN}$ ，作用线通过塔架的中心。最大起重量  $W_2 = 200 \text{ kN}$ ，最大悬臂长为 12 m，轨道 AB 的间距为 4 m。平衡重  $W_3$  到机身中心线距离为 6 m。试问：① 保证起重机在满载和空载时都不致翻到，平衡重  $W_3$  应为多少？② 当平衡重  $W_3 = 180 \text{ kN}$  时，求满载时轨道 A、B 的约束反力。

**解：**① 起重机受力如图 1-1-27 所示，在起重机不翻倒的情况下，这些力组成的力系应满足平面力系的平衡条件。

满载时，在起重机即将绕 B 点翻倒的临界情况下，有  $F_A = 0$ 。由此可求出平衡重  $W_3$  的最小值。

$$\sum M_B = 0, W_{3\min}(6+2) + 2W_1 - W_2(12-2) = 0$$

$$W_{3\min} = \frac{1}{8}(10W_2 - 2W_1) = 75 \text{ kN}$$

空载时, 载荷  $W_2 = 0$ 。在起重机即将绕  $A$  点翻倒的临界情况, 有  $F_B = 0$ 。由此可求出平衡重  $W_3$  的最大值。

$$\sum M_A = 0, W_{3\max}(6-2) - 2W_1 = 0$$

$$W_{3\max} = 0.5W_1 = 350 \text{ kN}$$

实际工作时, 起重机不允许处于临界平衡状态, 因此, 起重机不致翻到的平衡重取值范围为

$$75 \text{ kN} < W_3 < 350 \text{ kN}$$

② 当  $W_3 = 180 \text{ kN}$  时, 由平面平行力系的平衡方程

$$\sum M_A = 0, W_3(6-2) - 2W_1 - W_2(12+2) + 4F_B = 0$$

得

$$F_B = \frac{14W_2 + 2W_1 - 4W_3}{4} = 870 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_A + F_B - W_1 - W_2 - W_3 = 0$$

解得

$$F_A = 210 \text{ kN}$$

结果校核: 由不独立的平衡方程  $\sum M_B = 0$ , 可校核以上计算结果的正确性。

$$\sum M_B = 0, W_3(6+2) + 2W_1 - W_2(12-2) - 4F_B = 0$$

代入  $F_A$ 、 $W_1$ 、 $W_2$ 、 $W_3$  的值, 满足该方程, 说明计算无误。

**【例 1-7】** 平面刚架如图 1-1-28 所示, 已知  $F = 50 \text{ kN}$ ,  $q = 10 \text{ kN/m}$ ,  $M = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$ , 试求固定端  $A$  处的约束反力。

**解:** 取刚架为研究对象, 其上除受主动力外, 还受固定端  $A$  处的约束反力  $F_{Ax}$ 、 $F_{Ay}$  和  $M_A$ , 刚架受力图如图 1-1-28 所示。列平衡方程并求解。

$$\sum F_x = 0, F_{Ax} - q \times 1 = 0, F_{Ax} = 10 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0, F_{Ay} - F = 0, F_{Ay} = 50 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0, M_A = M + q \times 1 \times 1.5 - F \times 1 = 0, M_A = 65 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

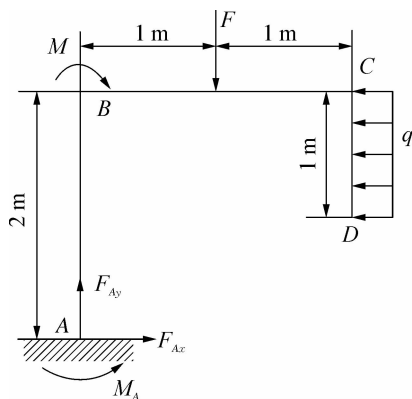


图 1-1-28 平面刚架

从以上几个例题可见, 对于平面力系平衡问题, 选取适当的坐标轴和矩心, 可以减少每个

平衡方程中的未知量的数目。一般说来,矩心应取在两未知力的交点上,而坐标轴应当与尽可能多的未知力相垂直。

## 五、考虑摩擦时的物体平衡

前面在分析物体受力时,总是把物体的接触面视为绝对光滑,忽略了物体间的摩擦。这是因为,有些构件的接触面确实比较光滑,而且有良好的润滑条件,摩擦力与物体所受的其它力相比的确很小,对所研究问题的实质无明显影响。为简化问题,便于抓住主要矛盾,摩擦力作为次要因素而被略去不计,这是允许的。

然而,在大多数工程实际问题中,摩擦力起着十分重要的作用,甚至是决定性的作用,是一个不可忽视的因素,必须予以考虑。例如,摩擦离合器和带传动要靠摩擦力才能工作;螺纹联接及工件装夹靠摩擦力起紧固作用;车辆靠驱动轮与地面间的摩擦力来启动;制动器靠摩擦力来刹车等,这些都是摩擦有用的一面。同时,摩擦也有其有害的一面:摩擦要消耗能量,并使机器磨损而降低精度和使用寿命。据估计,目前在能源使用中,有一半以上是用于克服各类摩擦,约 80% 的机械因磨损而失效。要充分利用摩擦有利的一面,克服其有害的一面,掌握一些摩擦现象的客观规律是非常必要的。

摩擦现象分为滑动摩擦和滚动摩擦两类。

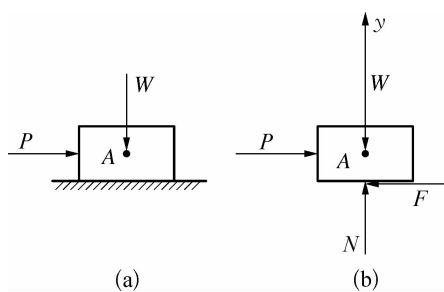


图 1-1-29 静摩擦力

### 1. 静滑动摩擦力

在粗糙的水平面上放置一重为  $W$  的物块,在该物块上施加一水平向右的力  $P$ ,如图 1-1-29(a) 所示。当力  $P$  的大小由零逐渐增大而又不太大时,物块仍保持静止。

可见,支承面对物块除作用有法向反力  $N$  外,在接触处还有一阻碍物体滑动的切向力  $F$  存在,如图 1-1-29(b) 所示,此力即静滑动摩擦力,简称为静摩擦力。

静摩擦力由平衡条件:

$$\sum F_x = 0, P - F = 0$$

得:  $P = F$

由上式可见,在物块处于平衡状态下,摩擦力  $F$  的大小随主动力  $P$  的增大而增大。但摩擦力  $F$  并不能无限增大,当力  $P$  超过某一值时,物体将开始滑动。当  $P$  增大到使物体将要滑动而又未滑动(即物体处于临界平衡状态)时的静摩擦力称为最大静摩擦力,记做  $F_{\max}$ 。

综上所述可得如下结论:静摩擦力是一种切向的约束反力,它的方向与物体相对运动趋势的方向相反,其大小随主动力的变化而变化,但介于零与最大值  $F_{\max}$  之间,即

$$0 \leq F \leq F_{\max}$$

实验表明,最大静摩擦力的大小与接触面间的法向反力  $N$  成正比,即

$$F_{\max} = \mu N$$

这称为静滑动摩擦定律或库仑摩擦定律。式中的比例系数  $\mu$  称为静滑动摩擦系数(简称静

摩擦系数),它是一个无量纲的量,与相互接触物体的材料及其表面状况(粗糙度、温度及湿度等)有关,而一般情况下与接触面积的大小无关。静摩擦系数的数值可查有关工程手册。

## 2. 动滑动摩擦力

当两物体接触面间具有相对滑动时,沿接触面相互产生的切向阻力称为动滑动摩擦力(简称动摩擦力)。

实验证明,动摩擦力  $F'$  的大小与接触面间的法向约束反力  $N$  成正比,即

$$F' = \mu' N$$

式中,  $\mu'$  称为动摩擦系数,它是一个无量纲的量,其值除与接触物体的材料及其表面状况有关外,通常还随着物体相对滑动速度的增大而略有减小。在一般情况下,动摩擦系数略小于静摩擦系数,即  $\mu' < \mu$ 。

当两物体间具有相对滚动(或相对滚动趋势)时,彼此将相互阻碍其滚动,这种现象称为滚动摩擦。

设重为  $W$ , 半径为  $R$  的轮子放在水平面上,在其轮心上作用一水平向右的力  $P$ , 如图 1-1-30(a) 所示。当  $P$  较小时, 轮子能保持静止。分析轮子的受力, 轮子受主动力  $P$ 、重力  $W$ 、法向约束反力  $N$  及静摩擦力  $F$  作用。 $W$  与  $N$  组成一对平衡力, 而  $P$  与静摩擦力  $F$  组成一力偶。可见支承面的反作用, 除作用于点  $A$  的力  $N$  与  $F$  之外, 还有一力偶, 称为滚阻力偶, 它与力偶  $(P, F)$  相平衡, 其矩用  $M$  表示, 如图 1-1-30(b) 所示。

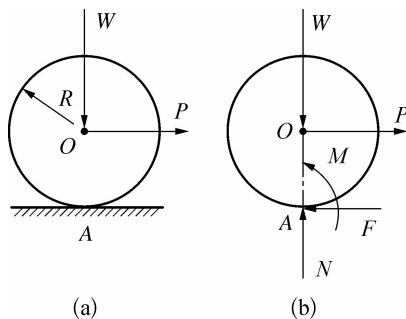


图 1-1-30 滚动摩擦概念

滚阻力偶与静摩擦力一样, 有一定范围, 它在零与最大值  $M_{\max}$  之间变化, 即

$$0 \leq M \leq M_{\max}$$

由实验可知: 滚阻力偶矩的最大值与法向反力  $N$  的大小成正比。即

$$M_{\max} = \delta N$$

式中的比例系数  $\delta$  称为滚动摩擦系数, 它是具有长度单位的系数。其值与接触物体的材料及表面状况(温度、湿度、硬度等)有关, 其参考值可在一般工程手册中查到。

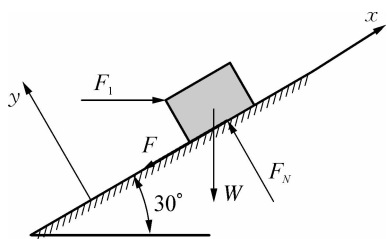


图 1-1-31

**【例 1-8】** 物块重  $W = 1500 \text{ N}$ , 放于倾角为  $30^\circ$  的斜面上, 它与斜面间的静摩擦因数为  $\mu_s = 0.2$ , 动摩擦因数  $\mu = 0.18$ 。物块受水平力  $F_1 = 400 \text{ N}$  作用, 如图 1-1-31 所示。问物块是否静止, 并求此时摩擦力的大小与方向。

**解:** 本题为判断物体是否平衡的问题, 求解此类问题的思路是: 先假设物体静止和摩擦力的方向, 应用平衡方程求解, 将求得的摩擦力与最大摩擦力比较, 确定物体是否静止。

取物块为研究对象, 设摩擦力沿斜面向下, 受力如图 1-1-31 所示。由平衡方程

$$\sum F_x = 0, -W \sin 30^\circ + F_1 \cos 30^\circ - F = 0$$

$$\sum F_y = 0, -W \cos 30^\circ - F_1 \sin 30^\circ + F_N = 0$$

解得

$$F = -403.6 \text{ N} \quad F_N = 1499 \text{ N}$$

$F$  为负值,说明平衡时摩擦力方向与所设的相反,即沿斜面向上。最大摩擦力为

$$F_{\max} = \mu_s F_N = 299.8 \text{ N}$$

显然  $|F| < F_{\max}$ 。说明物块在斜面上是向下滑动。此时的摩擦力应为动滑动摩擦力,方向沿斜面向上,大小为

$$F = F_d = \mu F_N = 269.8 \text{ N}$$



### 思考与练习

1. 如何采用几何法进行平面汇交力系的合成?
2. 什么是力的投影? 其正、负是如何规定的?
3. 如何用解析法求解平面汇交力系的合力?
4. 平面汇交力系的平衡方程是什么?
5. 平面力偶系的平衡方程是什么?
6. 人向前走路时,地面对鞋底的摩擦力的方向是向前还是向后?