第1章 Chapter 1

行　列　式

行列式是线性方程组理论的一个组成部分，是中学数学有关内容的提高和推广，也是一种重要的数学工具. 除此之外，行列式在许多理论和实际问题中也发挥着重要作用.

本章将主要介绍行列式的定义、基本性质、计算方法及其在求解线性方程组中的应用.

1.1 行列式的定义

1.1.1 二阶和三阶行列式

行列式这个概念究竟是如何形成的呢？这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次(线性)方程组入手.

在初等代数中,用加、减消元法求解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的具体步骤是:先从方程组(1.1)里消去 x_2 而求得 x_1,这只要将方程组(1.1)的两个式子分别乘以 a_{22} 与 $-a_{12}$,然后相加,就得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2.$$

同理,也可以从方程组(1.1)里消去 x_1 而求得 x_2,这只要将方程组(1.1)的两个式子分别乘以 $-a_{21}$ 与 a_{11},然后相加,得到

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-a_{21}b_1. \end{cases}$$

如果未知量 x_1,x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$,那么,这个线性方程组(1.1)有唯一解:

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

为了便于使用与记忆,我们引进二阶行列式的概念.

如果把线性方程组(1.1)中未知量 x_1,x_2 的系数按原来的位置写成两行两列的数表,并用两根竖线加以标出,那么,便得到一个二阶行列式,对此除引入字母 D 作为记号外,还规定:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

式(1.2)最右边的式子称为**二阶行列式 D 的展开式**.

于是,线性方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

则线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

由此可见，二阶行列式的引入与二元一次方程组有关，它表示排成2行2列的4个数在规定运算下得到的一个数值.

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解，我们引进三阶行列式的概念. 三阶行列式就是排成3行3列的9个数的一张数表，其展开式规定为

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

【例1】 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

【解】

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 6\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times 7\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &=(-1)\times(0\times5-9\times1)-6\times(4\times5-9\times2)+7\times(4\times1-0\times2) \\ &=9-12+28=25. \end{aligned}$$

所以，三阶行列式也是在规定运算下的一个数值，它可转化为二阶行列式的计算得到. 三阶行列式可以用来表达三元一次方程组(1.4)的解. 如果方程组(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程组有唯一解，其解同样可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.5}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.5)中，$x_i(i=1,2,3)$的分母均是方程组(1.4)的系数行列式 D，$x_i(i=1,2,3)$的分子是将系数行列式 D 中的第 i 列换成方程组(1.4)中的常数项，其余列不动所得到的行列式，并简记为 $D_i(i=1,2,3)$.

【例 2】 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ -2x_1+x_2-x_3=-1, \\ x_1+3x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

【解】 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

又计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=5,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-23,$$

所以方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{11},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{11},\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{23}{11}.$$

显然，对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组，当它们的系数行列式不等于零时，利用行列式这一工具求解十分简便，结果也容易记忆. 因此我们想到：对于未知数的个数等于方程的个数的 $n(n>3)$元线性方程组，是否也有类似的结果？这就需要引入 $n(n>3)$阶行列式的定义.

1.1.2 n 阶行列式的定义

前面，我们首先定义了二阶行列式，并指出了三阶行列式可通过转化为二阶行列式

来计算. 下面,按照这种思路给出 n 阶行列式的一种归纳定义.

定义 1　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

称为 **n 阶行列式**,其中横排称为**行**,竖排称为**列**. 它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数:

当 $n=1$ 时,

$$D_1=|a_{11}|=a_{11};$$

当 $n=2$ 时,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21};$$

当 $n=3$ 时,

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

需要指出的是:当 $n=1,2,3$ 时,可以利用上述规定求行列式的值,但是当 $n>3$ 时,如何求解呢? 为了寻求普遍有效的展开方法,下面介绍行列式元素的余子式与代数余子式的概念.

定义 2　在 n 阶行列式 D 中,划去元素 a_{ij} 所在第 i 行、第 j 列的元素,剩余元素按原顺序组成的一个 $n-1$ 阶行列式,称为 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij}. 在 M_{ij} 前乘上 $(-1)^{i+j}$,称为 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

例如,在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中,元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\quad A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

定理　行列式 D 等于它的任意一行(列)所有元素与其对应代数余子式的乘积之和. 设 D 的第 i 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 对应的代数余子式分别是 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$,则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\quad (i=1,2,\cdots,n). \tag{1.6}$$

式(1.6)称为行列式 D 按第 i 行展开的展开式.若按第 j 列展开,则展开式为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{1.7}$$

【例 3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

【解】 由行列式的定理,得

$$\begin{aligned}
D&=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}\\
&=3\times\left[1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\right]\\
&\quad+5\times\left[(-4)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}\right]\\
&=3\times[-7+2(-10-28)]+5\times[(-4)\times(-10-28)-(-12+21)]\\
&=466.
\end{aligned}$$

【例 4】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$.

【解】 由行列式的定理,得

$$\begin{aligned}
D&=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}\\
&=-a_{12}\cdot a_{24}\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}\\
&=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.
\end{aligned}$$

chapter 01
chapter 02
chapter 03
chapter 04
chapter 05
answers

【例 5】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -9 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

【解】 因为第 3 列中有 3 个零元素，可按第 3 列展开，得

$$D=2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式，按第 3 行展开，得

$$D=-2\times5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-200.$$

注意

计算行列式时，选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算，这是计算行列式的常用技巧之一.

1.1.3　几个常用的特殊行列式

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{与} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为上三角行列式与下三角行列式，其特点是主对角线以下（上）的元素全为零.

我们先来计算下三角行列式的值. 根据 n 阶行列式的定义，每次均通过按第 1 行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第 1 行都仅有第 1 项不为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对上三角行列式,我们可以每次通过按最后一行展开的方法来降低行列式的阶数,而每次最后一行都仅有最后一项不为零,同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,非主对角线上元素全为零的行列式称为**对角行列式**,易知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

综上所述可知,上、下三角行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.

习题 1-1

1. 计算下列二阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$;　　(3) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 \\ -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 -2 的代数余子式.

4. 已知四阶行列式 D 中的第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$,它们的余子式依次为 $5,3,-7,4$,求 D.

5. 证明:$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

1.2　行列式的性质及计算

行列式的奥妙在于对行列式的行或列进行了某些变换[如行与列互换、交换两行

(列)位置、某行(列)乘以某个数、某行(列)乘以某个数后加到另一行(列)等]后,行列式虽然会发生相应的变化,但变换前后两个行列式的值却仍保持着线性关系,这意味着,我们可以利用这些关系大大简化高阶行列式的计算.本节首先讨论行列式在这些方面的重要性质,然后进一步讨论如何利用这些性质计算高阶行列式的值.

1.2.1　行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

注意

由性质 1 可知,行列式中的行与列具有相同的地位,行列式的行具有的性质,它的列同样具有.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

注意

交换 i,j 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j$ $(c_i \leftrightarrow c_j)$.

推论 1　若行列式中有两行(列)的对应元素相同,则此行列式为零.

证明　互换 D 中相同的两行(列),有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

例如,行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD.$$

注意

第 i 行(列)乘以 k,记为 $r_i \times k(c_i \times k)$.

推论 2 行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

例如,行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$,因为第 1 列与第 2 列对应元素成比例,根据推论 3,可直接得到 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0$.

【例 1】 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

【解】

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -2\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= -2\times(-3)\times5\times1=30.$$

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可以写成两个行列式之和.这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

以三阶行列式为例,将数 k 乘第 1 行加到第 2 行上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

此性质可由性质 4 和推论 3 证得.

注意

第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上,记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

1.2.2　利用"三角化"计算行列式

计算行列式时,常用行列式的性质,把它转化为三角行列式来计算. 例如,化为上三角行列式的步骤是:如果第 1 列第 1 个元素为 0,先将第 1 行与其他行交换,使得第 1 列第 1 个元素不为 0,然后把第 1 行分别乘以适当的数加到其他各行,使得第 1 列除第 1 个元素外其余元素全为 0;再用同样的方法处理除去第 1 行和第 1 列后余下的低一阶行列式;如此继续下去,直至使它成为上三角行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

【例 2】　计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

【解】 $$D \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+(-1)r_1,r_4+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+4r_2,r_4+(-8)r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} =40.$$

【例 3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

【解】 注意到行列式中各行(列)4 个数之和都为 6. 故可把 2,3,4 行同时加到第 1 行,提出公因子 6,然后各行减去第 1 行,化为上三角行列式来计算:

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+(-1)r_1,r_3+(-1)r_1,r_4+(-1)r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} =48.$$

注意

仿照上述方法可得到更一般的结果:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} =[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

【例 4】 计算 $D=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

【解】 根据行列式的特点,可将第 1 列加至第 2 列,然后第 2 列加至第 3 列,再将第 3 列加至第 4 列,目的是使 D 中的零元素增多.

$$D\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_3}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=4a_1a_2a_3.$$

【例 5】 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

【解】 从第 4 行开始,后一行减前一行.

$$D\xlongequal{r_4+(-1)r_3,r_3+(-1)r_2,r_2+(-1)r_1}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-1)r_3,r_3+(-1)r_2}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}\xlongequal{r_4+(-1)r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

此外,在行列式的计算中,还将行列式的性质与行列式按行(列)展开的方法结合起来使用.一般可先用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素,再将行列式按此行(列)展开,化为低一阶的行列式,如此继续下去,直到化为二阶行列式为止.

注意

按行(列)展开计算行列式的方法称为降阶法.

【例 6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+2r_3,r_4+2r_3} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1+(-1)r_2,r_3+2r_2} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}=-6-18=-24.$$

【例 7】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & -4 & -1 & 0 \end{vmatrix}=5\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+(-1)r_1,r_3+(-3)r_1}5\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 0 & -13 & 2 \end{vmatrix}=5\times 2\begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -13 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=10\times(-10+52)=420.$$

【例 8】 证明 n 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

其中记号 $\prod$ 表示全体同类因子的乘积.

【证明】 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1$，结论成立.

假设对 $n-1$ 阶成立，要证明对 n 阶时结论也成立. 为此，设法把 D_n 降阶. 将 D_n 从最后一行开始，从下到上顺次后行减去前行的 a_1 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}.$$

将上面的行列式按第 1 列展开，然后把每一列的公因子 $(a_i-a_1)(i=2,3,\cdots,n)$ 提出来，就有

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，按归纳法假设知，它等于

$$\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

所以

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j). \tag{1.8}$$

这就是著名的**范德蒙行列式**，其结果在行列式的计算中可作为公式使用.

计算行列式的方法很多，也很灵活. 要掌握行列式的计算方法，应加强练习，在练习中总结经验.

习题 1-2

1. 用行列式的性质计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 14 \\ 9 & 12 & 15 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 34\,215 & 35\,215 \\ 28\,092 & 29\,092 \end{vmatrix}$； (5) $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

2. 用行列式的性质证明下列等式：

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

3. 用降阶法计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

1.3　克拉默法则

我们知道，对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

在其系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下，有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

那么，对于更一般的线性方程组是否有类似的结果？答案是肯定的. 在引入克拉默法则之前，我们先介绍有关 n 阶线性方程组的概念. 含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.9}$$

称为 ***n* 元线性方程组**. 当其右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，线性方程组(1.9)称为**非齐次线性方程组**，当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，线性方程组(1.9)称为**齐次线性方程**

组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.10}$$

线性方程组(1.9)的系数 a_{ij} 构成的行列式称为该方程组的**系数行列式 D**，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1(克拉默法则)　若线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq0$，则线性方程组(1.9)有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 相应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，而其余各列保持不变所得到的行列式.

【例 1】　用克拉默法则解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

【解】

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \overset{r_1+(-2)r_2,\,r_4+(-1)r_2}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \overset{c_1+2c_2,\,c_3+2c_2}{=\!=\!=\!=\!=} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27.$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&-5&8\\1&-3&0&9\\0&2&-1&-5\\1&4&-7&0\end{vmatrix}=27,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

一般来说，用克拉默法则求线性方程组的解时，计算量是比较大的. 对具体的数字线性方程组，当未知数较多时往往可用计算机来求解. 目前用计算机解线性方程组已经有了一套成熟的方法.

克拉默法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性、唯一性，与其在计算方面的作用相比，克拉默法则更具有重大的理论价值. 撇开求解公式(1.11)，克拉默法则可叙述为下面的定理.

定理 2 如果线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq0$，则线性方程组(1.9)一定有解，且解是唯一的.

在解题或证明中，常用到定理 2 的逆否定理：

定理 2′ 如果线性方程组(1.9)无解或解不是唯一的，则它的系数行列式必为零.

对齐次线性方程组(1.10)，易见 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是该方程组的解，称其为齐次线性方程组(1.10)的**零解**. 把定理 2 应用于齐次线性方程组(1.10)，可得到下列定理.

定理 3 如果齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq0$，则齐次线性方程组(1.10)只有零解.

定理 3′ 如果齐次线性方程组(1.10)有非零解，则它的系数行列式 $D=0$.

注意

今后还将进一步证明，如果齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$，则齐次线性方程组(1.10)有非零解.

【例 2】 判断齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=0,\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=0,\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$ 是否有非零解.

【解】 因为系数行列式$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&-1\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\end{vmatrix}=-153\neq0$,所以该方程组只有零解.

【例3】 λ为何值时,齐次线性方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$有非零解?

【解】 由定理3′知,若所给齐次线性方程组有非零解,则其系数行列式$D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2+(-1)c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda&-3+\lambda&4\\2&1-\lambda&1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)[-2(1-\lambda)+1]+(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]$$

$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$

$$=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).$$

如果齐次线性方程组有非零解,则$D=0$,即$\lambda=0$或$\lambda=2$或$\lambda=3$时,齐次线性方程组有非零解.

习题 1-3

1. 用克拉默法则解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases}2x+y+3z=9,\\3x-5y+z=-4,\\4x-7y+z=5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+5y+4z=10,\\x+3y+2z=6,\\2x+10y+9z=20;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+x_4=5,\\3x_1-7x_2+3x_3-x_4=-1,\\5x_1-9x_2+6x_3+2x_4=7,\\4x_1-6x_2+3x_3+x_4=8;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7,\\x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3,\\3x_1-x_2+2x_3=-1,\\2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7.\end{cases}$

2. 判断齐次线性方程组$\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+4x_3=0,\\5x_1+8x_2-2x_3=0\end{cases}$是否仅有零解.

3. λ,μ取何值时,齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$有非零解?

本章小结

一、基本概念

n 阶行列式，余子式，代数余子式，转置行列式，对角行列式，上(下)三角行列式.

二、基本内容

1. n 阶行列式的展开式

n 阶行列式等于它的任意一行(列)所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.

2. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　交换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 3　用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式.

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同.

性质 5　将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变.

推论 1　若行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零.

推论 2　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3　行列式中若有两行(列)元素成比例，则此行列式为零.

3. 克拉默法则

若线性方程组的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}\quad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 D 中第 j 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 相应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，而其余各列保持不变所得到的行列式.

三、基本方法

计算行列式的方法有：按一行(列)展开法，化上(下)三角行列式法.

复习题1

1. 用二、三阶行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases}7x+8y=6,\\3x-5y=11;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10,\\5x_1+7x_2=29;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+3y-z=-4,\\x-y+z=5,\\7x-6y-4z=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\5x_1+x_2+2x_3=29,\\3x_1-x_2+x_3=10.\end{cases}$

2. 求出行列式 $\begin{vmatrix}5x & 1 & 3x\\x & x & 1\\1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中包含 x^2 和 x^3 的项.

3. 在一个 n 阶行列式中等于零的元素如果比 n^2-n 还多,那么这个行列式的值等于多少?试说明理由.

4. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\3 & 2 & 1\\0 & 1 & 4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2 & 0 & 3\\7 & 1 & 6\\6 & 0 & 5\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a+x & x & x\\x & b+x & x\\x & x & c+x\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}\alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma\\\alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma\\\alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 2 & \cdots & 2\\2 & 3 & 2 & \cdots & 2\\2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\2 & 2 & 2 & \cdots & 3\end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\-1 & 0 & 3 & \cdots & n\\-1 & -2 & 0 & \cdots & n\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\-1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{vmatrix}$; (8) $\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1}\\1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$;

(9) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$ $(a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$.

5. 证明下列恒等式:

(1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\a^2 & b^2 & c^2\\a^3 & b^3 & c^3\end{vmatrix}=(ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

6. 用克拉默法则解下列线性方程组:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3. \end{cases}$$