

# 第一篇

## 微积分学

由于函数概念的产生和运用的加深,以及科学技术发展的需要,产生了微积分学.微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的,可以说它是继欧氏几何后,全部数学中最大的一个创造.微积分学是微分学和积分学的总称,主要包括函数、极限、微分学、积分学及其应用.其中,函数是微积分研究的基本对象,极限是微积分的基本概念,微分和积分是特定过程特定形式的极限.



## 第1章

## Chapter 1

# 极限与连续

在解决一些实际问题时,需要研究变量的变化趋势.例如,当自变量无限接近于某个常数时,函数无限接近于什么?这就需要极限理论.极限理论是微积分学的基本推理工具,微积分学中的很多概念和定理都是用极限方法推导出来的.本章将主要介绍极限与连续的基本概念,以及它们的一些性质,为进一步学好微积分打下基础.

# 1.1 函 数

## 1.1.1 函数的定义

**定义 1** 设  $D$  是由数组成的集合. 如果对于每个数  $x \in D$ , 变量  $y$  按照一定的对应法则  $f$  总有唯一确定的数值和它对应, 那么将对应法则  $f$  称为在  $D$  上  $x$  到  $y$  的一个**函数**, 记作  $y=f(x)$ ,  $x$  称为**自变量**,  $y$  称为**因变量**,  $D$  称为函数的**定义域**.

当  $x$  取  $x_0 \in D$  时, 与  $x_0$  对应的  $y$  的数值称为函数在点  $x_0$  处的**函数值**, 记作  $f(x_0)$ . 当  $x$  取遍  $D$  中的一切数时, 对应的函数值集合  $M = \{y | y = f(x), x \in D\}$  称为函数的**值域**.

在函数的定义中, 如果对于每一个  $x \in D$ , 都有唯一的  $y$  与它对应, 那么这种函数称为**单值函数**; 若同一个  $x$  值可以对应多于一个的  $y$  值, 那么这种函数称为**多值函数**. 例如, 由方程  $x^2 + y^2 = 9$  所确定的以  $x$  为自变量的函数  $y = \pm \sqrt{9 - x^2}$  是一个多值函数, 而它的每一个“分支”  $y = \sqrt{9 - x^2}$  或  $y = -\sqrt{9 - x^2}$  都是单值函数. 以后如果没有特别说明, 所说的函数都是指单值函数.

## 1.1.2 函数的表示法

(1) 表格法, 将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法, 如三角函数表、常用对数表及经济分析中的各种统计报表等;

(2) 图形法, 用图形表示两个变量的函数关系的方法, 如图 1-1 所示;

(3) 解析法, 用一个等式表示两个变量的函数关系的方法, 如  $y = x + 3$ ,  $y = \lg(x + 2)$  等.

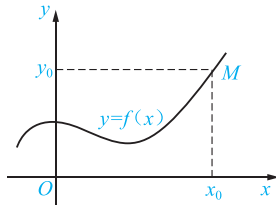


图 1-1

## 1.1.3 函数的定义域

在实际问题中, 函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义, 而仅就抽象的解析式来研究函数时, 这时定义域就取使解析式有意义的自变量的全体. 要使解析式有意义, 我们通常考虑以下几点:

- (1) 分式的分母不能为零;
- (2) 偶次根式的被开方数必须为非负数;
- (3) 对数式中的真数必须大于零;
- (4) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域;
- (5) 若函数表达式是由几个数学式子组成, 则其定义域应取各部分定义域的交集;

(6) 分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

$$\text{【例 1】 设 } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x < 0 \\ 3, & 0 \leq x < 1. \\ \ln(2x-1), & x \geq 1 \end{cases}$$

求  $f(-3), f\left(\frac{1}{3}\right), f(1+h)$ .

**【解】**

$$f(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2,$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3,$$

$$f(1+h) = \begin{cases} \sqrt{1-(1+h)}, & 1+h < 0 \\ 3, & 0 \leq 1+h < 1 \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sqrt{-h}, & h < -1 \\ 3, & -1 \leq h < 0. \\ \ln(1+2h), & h \geq 0 \end{cases}$$

**【例 2】** 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x^2 + 2x + 1}; \quad (2) y = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

**【解】** (1) 若使函数有意义, 则  $x^2 + 2x + 1 \neq 0$ , 即  $(x+1)^2 \neq 0$ . 即  $x \neq -1$ . 所以函数的定义域为  $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ .

(2) 若使函数有意义, 则  $\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \end{cases}$ , 解得  $1 < x \leq 2$  或  $-2 \leq x < -1$ . 所以函数的定义域为  $[-2, -1) \cup (1, 2]$ .

### 1.1.4 函数的几种特性

#### 1. 奇偶性

**定义 2** 设函数的定义域  $D$  关于原点对称. 如果对于任意的  $x \in D$ ,  $f(-x) = -f(x)$ , 那么  $f(x)$  为**奇函数**; 如果对于任意的  $x \in D$ ,  $f(-x) = f(x)$ , 那么  $f(x)$  为**偶函数**. 否则  $f(x)$  为非奇非偶函数.

奇函数的图形关于原点对称, 如图 1-2 所示; 偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 如图 1-3 所示.

#### 注意

在判断函数的奇偶性时, 一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称. 若不关于原点对称, 则为非奇非偶函数.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers



**【证明】** 设  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2).$$

因为  $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ ,  $x_1 < x_2$ , 所以  $x_1 + x_2 > 0$ ,  $x_1 - x_2 < 0$ , 所以  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 所以  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, +\infty)$  上是单调递增函数.

### 3. 有界性

**定义 4** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 数集  $X \subset D$ . 若存在数  $K_1$ , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有上界, 而  $K_1$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个上界(任问大于  $K_1$  的数也是  $f(x)$  在  $X$  上的上界); 若存在数  $K_2$ , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有下界, 而  $K_2$  称为函数  $f(x)$  在  $X$  上的一个下界(任问小于  $K_2$  的数也是在  $f(x)$  在  $X$  上的下界); 若存在正数  $M$ , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任意  $x \in X$  都成立, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上有界; 若这样的  $M$  不存在, 则称函数  $f(x)$  在  $X$  上无界, 这就是说, 如果对于任何正数  $M$ , 总存在  $x_1 \in X$ , 使  $|f(x_1)| > M$ , 那么函数  $f(x)$  在  $X$  上无界.

**【例 5】** 就函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  内来说, 数 1 是它的一个上界, 数 -1 是它的一个下界(当然, 大于 1 的任何数也是它的上界, 小于 -1 的任何数也是它的下界). 又如

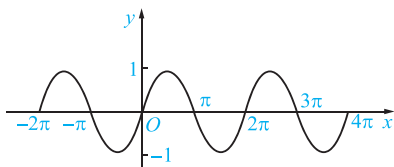
$$|\sin x| \leq 1$$

对任一实数  $x$  都成立, 故函数  $f(x) = \sin x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上是有界的. 这里  $M=1$  (当然也可取大于 1 的任何数作为  $M$  而使  $|f(x)| \leq M$  成立).

### 4. 周期性

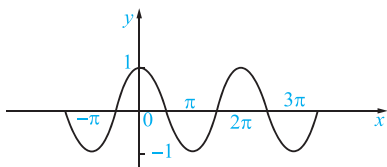
**定义 5** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 对于任意的  $x \in D$ , 存在不为零的数  $T$ , 使  $f(x+T) = f(x)$ , 那么  $f(x)$  为  $D$  上的周期函数,  $T$  称为函数的一个周期, 并且  $nT$  ( $n$  为非零整数) 也是它的周期. 平时, 我们把函数的最小正周期称为函数的周期.

**【例 6】** 函数  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  都是以  $2\pi$  为周期的周期函数.  $y = \sin x$  和  $y = \cos x$  的图形分别如图 1-6 和图 1-7 所示.



函数  $y = \sin x$  的图像

图 1-6



函数  $y = \cos x$  的图像

图 1-7

chapter  
01

chapter  
02

chapter  
03

chapter  
04

chapter  
05

chapter  
06

chapter  
07

chapter  
08

chapter  
09

chapter  
10

chapter  
11

appendix

answers

## 1.1.5 初等函数

### 1. 基本初等函数

我们把常数函数  $y=c$  ( $c$  为常数)、幂函数  $y=x^a$  ( $a$  为实数)、指数函数  $y=a^x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ ,  $a$  为常数)、对数函数  $y=\log_a x$  ( $a>0$ ,  $a\neq 1$ ,  $a$  为常数)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

### 2. 复合函数

**定义 6** 若函数  $y=f(u)$ ,  $u=g(x)$ , 且  $u=g(x)$  的值域或部分值域包含在  $f(u)$  的定义域中, 则变量  $y$  通过变量  $u$  与变量  $x$  建立了对应关系, 这个对应关系称为  **$y$  是  $x$  的复合函数**,  $u$  是**中间变量**,  $x$  是**自变量**, 通常将

$$y=f(u), \quad u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)].$$

例如,  $y=\sin^2 x$  就是由  $y=u^2$ ,  $u=\sin x$  复合而成的, 这个复合函数的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 它也是  $u=\sin x$  的定义域.

同样地,  $y=\sqrt{1-x^2}$  是由  $y=\sqrt{u}$ ,  $u=1-x^2$  复合而成的, 这个复合函数的定义域为  $[-1, 1]$ , 它只是  $u=1-x^2$  的定义域  $(-\infty, +\infty)$  的一部分.

### 注意

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的; 复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

**【例 7】** 指出下列函数的复合过程:

(1)  $y=\cos^2 x$ ;      (2)  $y=\sqrt{x^2+2x}$ .

**【解】** (1)  $y=\cos^2 x$  是由  $y=u^2$ ,  $u=\cos x$  复合而成的.

(2)  $y=\sqrt{x^2+2x}$  是由  $y=\sqrt{u}$ ,  $u=x^2+2x$  复合而成的.

**【例 8】** 设  $f(x)=x^2$ ,  $g(x)=\log_2 x$ , 求  $f[g(x)]$ ,  $g[f(x)]$ ,  $f[f(x)]$ .

**【解】**

$$f[g(x)]=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x;$$

$$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2 |x|;$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4.$$

### 3. 初等函数

**定义 7** 基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次的加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算, 以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数, 叫做**初等函数**.



例如,函数  $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$  是一个初等函数.

又如,函数  $y = x^x$ , 由于  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$ , 因此

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$

是由  $y = e^u$ ,  $u = x \ln x$  复合而成的函数, 因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示, 那么它就不是初等函数. 例如, 函数  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$  就不是初等函数, 我们将这样的函数叫做**非初等函数**.

### 习题 1.1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x^2 - 3x - 10};$$

$$(2) y = \log_2 \frac{1}{x+1};$$

$$(3) y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & x \geq 5 \\ \frac{1}{x-6}, & x < 5 \end{cases};$$

$$(4) y = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}.$$

2. 求下列函数的函数值:

$$(1) f(x) = \frac{x^2-2}{x+3}, \text{ 求 } f(-1), f(5);$$

$$(2) \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \operatorname{sgn} 2, \operatorname{sgn}(-1), \operatorname{sgn}(0).$$

3. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) y = \cos x + 3;$$

$$(2) y = \lg(1+x);$$

$$(3) y = \sqrt{x^2-4};$$

$$(4) y = x^2 + 2x.$$

4. 求下列函数的单调区间:

$$(1) y = x^2 - x;$$

$$(2) y = \sin x \left( -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \right);$$

$$(3) y = 2 \log_4 x;$$

$$(4) y = x^2 + 3x - 18 (x > -6).$$

5. 下列哪些函数是周期函数? 如果是周期函数, 请指出其周期:

$$(1) y = \sin(2x+3);$$

$$(2) y = x \cos x;$$

$$(3) y = \cos 2x;$$

$$(4) y = \tan \frac{x}{5}.$$

6. 下列哪些函数是有界函数. 如果有界函数, 请指出其上界和下界:

$$(1) y = x^2 (-1 < x < 2);$$

$$(2) y = \sin 2x;$$

$$(3) y = \frac{1}{x};$$

$$(4) y = \log_2 x (x < 1).$$

7. 设  $y = f(u) = \sqrt{u}$ ,  $u = \varphi(x) = \ln x$ , 写出复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  的表达式.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

8. 将下列复合函数拆开为几个简单函数:

$$(1) y = e^{-\frac{x}{2}};$$

$$(2) y = \ln \cos \frac{x}{2}.$$

## 1.2 极 限

### 1.2.1 数列的极限

以前我们已经学过数列的概念,现在我们来考查当项数  $n$  无限增大时,无穷数列  $\{a_n\}$  的变化趋势.我们先看一个实例:一个篮球从距地面 1 m 高处自由下落,受地心引力及空气阻力作用,每次触地后篮球又反弹到前一次高度的  $\frac{1}{2}$  处(图 1-8).于是,可得到表示篮球高度的一个数列

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \quad (1-1)$$

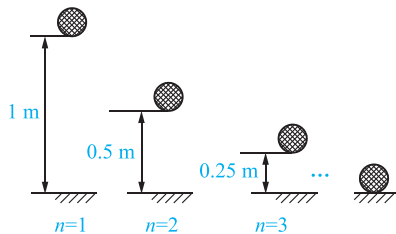


图 1-8

我们知道,篮球最终会停在地面上,即反弹高度  $h=0$ ,这说明,随着反弹次数  $n$  的无限增大,数列通项  $h_n = \frac{1}{2^{n-1}}$  的值将趋向于 0.

现在,我们再来看两个无穷数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (1-2)$$

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+(-1)^n}{n}, \dots \quad (1-3)$$

为便于观察,我们在平面直角坐标系中作出数列(1-2)和(1-3)的图形,如图 1-9 和图 1-10 所示.

从图 1-9 中可看出,当  $n$  增大时,点  $(n, a_n)$  从横轴上方无限接近于直线  $a_n=0$ . 这表明,当  $n$  无限增大时,数列通项  $a_n = \frac{1}{n}$  的值无限趋近于零.

同样,从图 1-10 中可看出,当  $n$  增大时,点  $(n, a_n)$  从上下两侧无限接近于直线  $a_n=1$ . 这

表明,当  $n$  无限增大时,数列通项  $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$  的值无限趋近于常数 1.

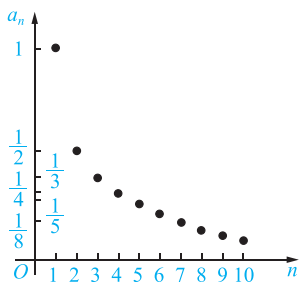


图 1-9

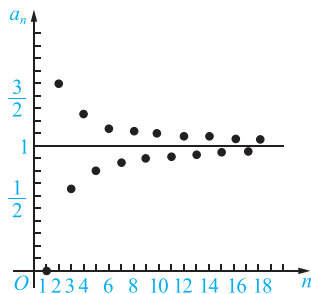


图 1-10

上述数列的变化趋势具有相同的特点:当  $n$  无限增大时,数列的项  $a_n$  无限地趋近于某个常数  $A$ .

**定义 1** 如果无穷数列  $\{a_n\}$  的项数  $n$  无限增大时,  $a_n$  无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就叫做数列  $\{a_n\}$  的极限(limit). 记作:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \rightarrow A \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

读作“当  $n$  趋向于无穷大时,数列  $\{a_n\}$  的极限等于  $A$ ”.

根据定义,上面三个数列的极限分别记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1.$$

**【例 1】** 判断下面数列是否有极限,如果有,写出它的极限.

- (1)  $-2, -2, -2, \dots, -2, \dots;$
- (2)  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \dots;$
- (3)  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots.$

**【解】** (1) 这个数列是常数数列,通项  $a_n = -2$ ,数列的极限是  $-2$ ,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2.$$

(2) 这个数列是公比  $q = -\frac{1}{2}$  的等比数列,通项是  $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$ ,可以看出,当  $n$  无限增大时,  $(-1)^n \frac{1}{2^n}$  无限趋近于 0,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{2^n} = 0.$$

(3) 当  $n$  无限增大时,  $a_n = n^2$  也无限增大,不能趋近于一个确定的常数,因此,这个数列没有极限.

由此例,可得下面的结论:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C = C \quad (C \text{ 为常数});$$

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1).$$

### 注意

不是任何无穷数列都有极限.

如数列  $\{2n\}$ , 当  $n$  无限增大时,  $2n$  也无限增大, 不能无限地趋近于一个确定的常数, 因此这个数列没有极限.

又如数列  $\{(-1)^n\}$ , 当  $n$  无限增大时,  $(-1)^n$  在 1 与  $-1$  两个数上来回跳动, 不能无限地趋近于一个确定的常数, 因此这个数列也没有极限.

## 1.2.2 函数的极限

### 1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 2** 如果当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x)$  无限趋近于确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow \infty$  时的**极限**, 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$

### 注意

这里“ $x \rightarrow \infty$ ”表示  $x$  既取正值而无限增大(记作  $x \rightarrow +\infty$ ), 同时也取负值而绝对值无限增大(记作  $x \rightarrow -\infty$ ). 但有的时候  $x$  的变化趋势只能取这两种变化中的一种情况.

下面给出当  $x \rightarrow +\infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时函数极限的定义.

**定义 3** 如果当  $x \rightarrow +\infty$  (或  $x \rightarrow -\infty$ ) 时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow +\infty$  (或  $x \rightarrow -\infty$ ) 时的**极限**, 记作

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A & \text{ 或当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A \\ (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A & \text{ 或当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow A). \end{aligned}$$

**【例 2】** 如图 1-11 所示, 利用图形考查当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  的变化趋势.

**【解】** 从图 1-11 中可以看出, 当  $x$  的绝对值无限增大时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于常数 0.

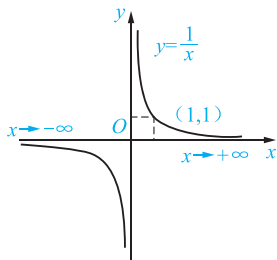


图 1-11

所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ . 显然地,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ .

## 2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

**定义 4** 设函数  $y=f(x)$  在  $x_0$  的某空心邻域\* 内有定义, 如果当  $x$  无限趋近于  $x_0$  时, 函数  $f(x)$  无限趋近于常数  $A$ , 那么  $A$  就叫做函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  时的**极限**, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或当 } x \rightarrow x_0 \text{ 时, } f(x) \rightarrow A.$$

**【例 3】** 如图 1-12 所示, 根据图形求  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} + 1\right)$  的值.

**【解】** 如图 1-12 所示, 当  $x$  从 3 的左侧无限趋近于 3 时, 即  $x$  取

$$2.9, 2.99, 2.999, \dots \rightarrow 3$$

时, 对应的函数  $f(x)$  的值从

$$1.97, 1.997, 1.9997, \dots \rightarrow 2.$$

当  $x$  从 3 的右侧无限趋近于 3 时, 即  $x$  取

$$3.1, 3.01, 3.001, \dots \rightarrow 3$$

时, 对应的函数  $f(x)$  的值从

$$2.03, 2.003, 2.0003, \dots \rightarrow 2.$$

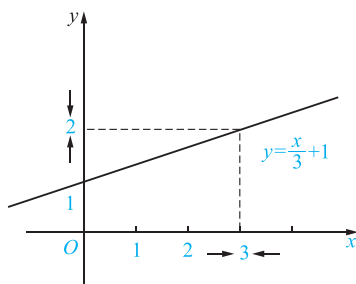


图 1-12

由此可知, 当  $x \rightarrow 3$  时,  $f(x) = \frac{x}{3} + 1$  的值无限趋近于 2. 即  $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$ .

**【例 4】** 考查极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} C$  ( $C$  为常数).

**【解】** 把  $C$  看作常数函数  $f(x) = C$ , 则当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f(x)$  的值恒等于  $C$ . 因此有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} C = C.$$

即常数的极限是它本身.

前面我们提到的  $x \rightarrow x_0$ , 是指  $x$  以任意方式趋近于  $x_0$ , 但有的时候我们只需讨论从

\* 邻域就是在数轴上满足  $\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ ,  $\delta > 0$  的点的集合, 即区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内的一切实数.  $x_0$  称为邻域的中心,  $\delta$  为半径. 若这个区间不含点  $x_0$ , 则称为  $x_0$  的空心  $\delta$  邻域.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

$x_0$  的左侧趋近于  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0^-$ ) 或从  $x_0$  的右侧趋近于  $x_0$  ( $x \rightarrow x_0^+$ ) 时的极限.

下面给出当  $x \rightarrow x_0^-$  ( $x \rightarrow x_0^+$ ) 时, 函数  $f(x)$  的极限.

**定义 5** 如果当  $x \rightarrow x_0^-$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的**左极限**(left limit), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A, f(x_0^-) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^-).$$

如果当  $x \rightarrow x_0^+$  时, 函数  $f(x)$  的值无限趋近于一个确定的常数  $A$ , 那么  $A$  就称为函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的**右极限**(right limit), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A, f(x_0^+) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow x_0^+).$$

根据  $x \rightarrow x_0$  时函数  $f(x)$  的极限的定义和左右极限的定义, 容易得到如下结论:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A.$$

**【例 5】** 若函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases},$$

试求  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**【解】** 作出这个分段函数的图形, 如图 1-13 所示, 可见函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow 0$  时的左极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1.$$

右极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1.$$

因为当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $f(x)$  的左、右极限虽各自存在但不相等, 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

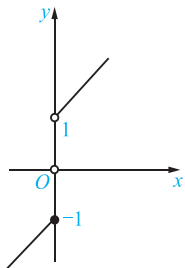


图 1-13

### 注意

函数在点  $x_0$  处的极限与函数在该点有没有定义无关.

## 1.2.3 无穷小量与无穷大量

在研究函数的变化趋势时, 我们发现有两类特殊的函数: 一是函数值无限趋向为零;

二是函数的绝对值“无限变大”. 下面我们来研究这两种情形.

### 1. 无穷小量

**定义 6** 如果当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 函数  $f(x)$  的极限为零, 那么称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为**无穷小量**, 简称**无穷小**.

例如, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sin x$  是无穷小; 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  是无穷小.

#### 注意

(1) 无穷小和绝对值很小的数是截然不同的. 例如,  $10^{-10}$ ,  $10^{-100}$  都是很小的数, 但不是无穷小. 只有零是可以作为无穷小的唯一的常数, 因为  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} 0 = 0$ .

(2) 无穷小和自变量的变化趋势是密切相关的. 例如, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  为无穷小; 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{1}{x}$  就不是无穷小.

### 2. 无穷大量

**定义 7** 如果当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时, 函数  $f(x)$  的绝对值无限增大, 那么称函数  $f(x)$  当  $x \rightarrow x_0$  (或  $x \rightarrow \infty$ ) 时为**无穷大量**, 简称**无穷大**.

如果按函数极限的定义来看,  $f(x)$  的极限不存在, 但是为了便于叙述, 我们称“函数的极限是无穷大”, 并记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = \infty.$$

如果在无穷大的定义中, 对于  $x_0$  邻域内的  $x$  (或对于绝对值相当大的  $x$ ), 对应的函数值都是正的或都是负的, 则这两种情形分别记作

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x) = -\infty.$$

例如,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

#### 注意

(1) 无穷大和绝对值很大的数是完全不同的. 例如,  $10^{10}$ ,  $-10^{100}$  等都是绝对值很大的数, 但不是无穷大.

(2) 无穷大和自变量的变化趋势密切相关. 例如, 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{x}$  为无穷大; 当  $x \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{x}$  为无穷小.

### 3. 无穷小量与无穷大量的关系

**定理** 在自变量的同一变化过程中, 如果  $f(x)$  为无穷大, 那么  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷小; 反之, 如果  $f(x)$  为无穷小, 且  $f(x) \neq 0$ , 那么  $\frac{1}{f(x)}$  为无穷大.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

例如, 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$ ; 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = \infty$ .

#### 4. 无穷小量的性质

在自变量的同一变化过程中, 无穷小具有以下三个性质:

**性质 1** 有限个无穷小的代数和为无穷小.

**性质 2** 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

**性质 3** 有限个无穷小的乘积为无穷小.

**【例 6】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ .

**【解】** 因为  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ,  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , 由无穷小的性质 2 可知,  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ .

**【例 7】** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)$ .

**【解】** 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 0$ , 由无穷小的性质 1 可知,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = 0$ .

### 1.2.4 极限的运算法则

利用极限的定义只能计算一些很简单的函数的极限, 对于比较复杂的函数极限, 我们需要用到极限的运算法则来进行计算. 下面给出函数极限的运算法则:

**法则** 设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , 则有

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A \cdot B;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0} [Cf(x)] = C \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C \cdot A \quad (C \text{ 为常数});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

法则(1)和法则(2)可推广到有限个具有极限的函数的情形.

**【例 8】** 求  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x - 2)$ .

**【解】** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + \lim_{x \rightarrow 2} 3x - \lim_{x \rightarrow 2} 2 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 + 3 \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 4 + 6 - 2 = 8$ .

**【例 9】** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 3 + \frac{2}{x^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \right]$ .



$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{x^2}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}\right) \left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}\right) \\ &= (3+0)(1-0) = 3 \times 1 = 3. \end{aligned}$$

$$\text{【例 10】 求 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{【解】 原式} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + x + 3)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 3}{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 3} \\ &= \frac{2+1+3}{1-3} = -3. \end{aligned}$$

$$\text{【例 11】 求 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}.$$

**【解】** 当  $x \rightarrow 2$  时, 分母的极限为 0, 这时不能用法则(4), 由于  $x \rightarrow 2$  而  $x \neq 2$  即  $x-2 \neq 0$ , 因而分式中可约去不为 0 的公因子, 得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x + \lim_{x \rightarrow 2} 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{【例 12】 求 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}.$$

**【解】** 令  $t = e^{\frac{1}{x}}$ , 则当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $t \rightarrow +\infty$ , 这时  $e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{t}$ ,

$$\text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t - \frac{1}{t}}{t + \frac{1}{t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{1}{t^2}} = 1.$$

## 1.2.5 两个重要极限

### 1. 判定极限存在的两个准则

为了得出两个重要极限公式, 先给出两个判定极限存在的准则.

**准则 1** 如果函数  $f(x), g(x), h(x)$  在同一变化过程中满足

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

且  $\lim g(x) = \lim h(x) = A$ , 那么  $\lim f(x)$  存在且等于  $A$ .

**准则 2** 若数列  $\{x_n\}$  单调有界, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  一定存在.

### 2. 两个重要极限公式

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . 我们考查当  $x$  趋近于 0 时, 函数  $\frac{\sin x}{x}$  的变化趋势, 列表 1-1 如下:

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

表 1-1

$x$	$\pm \frac{\pi}{4}$	$\pm \frac{\pi}{8}$	$\pm \frac{\pi}{16}$	$\pm \frac{\pi}{32}$	$\pm \frac{\pi}{64}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.900 316 3	0.974 495 4	0.993 586 9	0.998 394 4	0.999 598 5
$x$	$\pm \frac{\pi}{128}$	$\pm \frac{\pi}{256}$	$\pm \frac{\pi}{512}$	$\pm \frac{\pi}{1024}$	$\pm \frac{\pi}{2048} \cdots \rightarrow 0$
$\frac{\sin x}{x}$	0.999 899 6	0.999 974 9	0.999 993 7	0.999 998 4	0.999 999 6 $\cdots \rightarrow 1$

从上表中可以看出,当  $x \rightarrow 0$  时,  $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ , 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

**【例 13】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$ .

**【解】** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{x} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ .

令  $t = \frac{x}{2}$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $t \rightarrow 0$ , 因此

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}.$$

**【例 14】** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cot x$ .

**【解】** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos x \cdot \frac{x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \times 1 = 1$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ . 我们考察当  $x \rightarrow \infty$  时, 函数  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  的变化趋势, 列表 1-2 如下:

表 1-2

$x$	10	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	...
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	...
$x$	-10	$-10^2$	$-10^3$	$-10^4$	$-10^5$	$-10^6$	...
$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 41	2.718 30	2.718 28	...

从上表中可以看出, 当  $x \rightarrow +\infty$  和  $x \rightarrow -\infty$  时, 函数  $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  无限趋近于一个确定

的常数,这个常数就是无理数  $e=2.718\ 281\ 828\ 45\cdots$ ,即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

在上式中,令  $u = \frac{1}{x}$ ,则当  $x \rightarrow \infty$  时,  $u \rightarrow 0$ ,于是我们可以得到另一种形式

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

**【例 15】** 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$ .

**【解】** 原式  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^3 = e^3$ .

### 习题 1.2

1. 判断下面数列当  $n \rightarrow \infty$  时是否有极限,如果有,写出它们的极限:

- (1)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2}$ ;                      (2)  $a_n = \frac{n-2}{n+3}$ ;  
 (3)  $a_n = \frac{n^3+n}{n^2-n}$ ;                      (4)  $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$ .

2. 求下列极限:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{3n-1}$ ;                      (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^2} + 2\right)$ ;  
 (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-5}{2n^2+n}$ ;                      (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{8n^2-4n}$ .

3. 分析下列函数的变化趋势,若极限存在,求出该极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$ ;                      (2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$ ;  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3+1}$ ;                      (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x}$ .

4. 求下列函数的极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x}{2}$ ;                      (2)  $\lim_{x \rightarrow -3} (2x^2+1)$ ;  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$ ;                      (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x+1)$ .

5. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ , 求当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  的左、右极限,并说明当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x)$  的极限是否存在.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

6. 试说明下列极限不存在的理由:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1); \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x.$$

7. 指出下列各函数是无穷小还是无穷大?

$$(1) \sin x (x \rightarrow 0); \quad (2) \tan x \left( x \rightarrow \frac{\pi}{2} \right).$$

8. 利用无穷小的性质, 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \tan x); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}.$$

9. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 6x + 6); \quad (2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 4}{6x + 2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2-1)^3}{x+7}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

10. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+x-2}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{4x}{(x-6)^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^3-8} \right).$$

11. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+4x+5}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3+3x+3}{2x^2+1};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{2x+x^3}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2+3}{x-2}.$$

12. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 7x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2}.$$

13. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{2}{x}}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{x+2}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^{x+1}.$$

14. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{\sin 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{-x}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

## 1.3 函数的连续性

在许多实际问题中,数量的变化往往是连续的.例如,气温随时间的变化而变化着,当时间的变化极为微小时,气温的变化也极为微小,这就是说,气温是连续变化的.下面我们来研究函数的连续性.

### 1.3.1 函数连续的概念

#### 1. 函数的增量

**定义 1** 设函数  $y=f(x)$ , 当自变量由初值  $x_0$  变到终值  $x_1$  时, 我们把差值  $x_1-x_0$  叫做自变量的**增量**(或**改变量**), 记作  $\Delta x$ , 即

$$\Delta x = x_1 - x_0,$$

因此

$$x_1 = x_0 + \Delta x.$$

这时可以说, 自变量由初值  $x_0$  变化到  $x_0 + \Delta x$ .

相应地, 函数值由  $f(x_0)$  变化到  $f(x_0 + \Delta x)$ , 我们把差值

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

叫做函数的**增量**(或**改变量**), 记作  $\Delta y$ , 即

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

**【例 1】** 在下列条件下, 求函数  $y=f(x)=x^2-2$  的增量:

- (1) 当  $x$  由 2 变化到 3;
- (2) 当  $x$  由 2 变化到 1.

**【解】** (1) 由题意可知  $x_0=2, x_0+\Delta x=3$ , 所以

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(3) - f(2) = 7 - 2 = 5.$$

(2) 由题意可知  $x_0=2, x_0+\Delta x=1$ , 所以

$$\Delta y = f(1) - f(2) = -1 - 2 = -3.$$

#### 2. 函数的连续

**定义 2** 设函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  某邻域内有定义, 如果当自变量  $x$  在  $x_0$  处的增量  $\Delta x$  趋近于零时, 函数  $y=f(x)$  的相应增量  $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$  也趋近于零, 也就是说, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

或

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

那么称函数  $y=f(x)$  在点  $x_0$  处**连续**,  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的**连续点**.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

由于  $x = x_0 + \Delta x$ , 因此  $\Delta x \rightarrow 0$  就是  $x \rightarrow x_0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  就是  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ ,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  就是  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

因此, 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续的定义也可叙述如下.

**定义 3** 如果函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  某邻域内有定义, 并且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 那么称函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  处连续,  $x_0$  称为函数  $f(x)$  的连续点.

据此, 函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  连续必须满足以下三个条件:

- (1) 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处有定义;
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在;
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

如果函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处不连续, 那么称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处是间断的, 点  $x_0$  称作函数  $y = f(x)$  的间断点或不连续点.

**定义 4** 设函数  $y = f(x)$  在  $x_0$  处及其左(或右)邻域内有定义, 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$  (或  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ ), 那么称函数  $f(x)$  在  $x_0$  处左连续(或右连续).

**定义 5** 如果函数  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  内每一点都连续, 那么称函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内连续, 或称函数  $f(x)$  为区间  $(a, b)$  内的连续函数, 区间  $(a, b)$  称为函数  $f(x)$  的连续区间.

如果  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上有定义, 在区间  $(a, b)$  内连续, 且在右端点  $b$  处左连续, 在左端点  $a$  处右连续, 即  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ . 那么称函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续.

在几何上, 连续函数的图形是一条连续不间断的曲线.

**【例 2】** 适当选取  $a$  的值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}}, & x < 0 \\ x+a, & x \geq 0 \end{cases}$$

在  $x=0$  处连续.

**【解】** 因为  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处及其近旁有定义, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a) = a,$$

所以要使  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 必须  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ , 即  $a = e^2$ . 因此当  $a = e^2$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

### 1.3.2 初等函数的连续性

#### 1. 连续函数的和、差、积、商的连续性

**性质 1** 如果函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在点  $x_0$  处连续, 那么它们的和、差、积、商(分母在  $x_0$  处不等于零)也都在  $x_0$  处连续. 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = f(x_0) \pm g(x_0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = f(x_0)g(x_0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad (g(x_0) \neq 0).$$

**【例 3】** 判断  $\tan x$  和  $\cot x$  在  $x = \frac{\pi}{4}$  处的连续性.

**【解】** 由于  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , 而  $\sin x$  和  $\cos x$  在点  $x = \frac{\pi}{4}$  处是连续的, 所以  $\tan x$ ,  $\cot x$  在点  $x = \frac{\pi}{4}$  处也是连续的.

#### 2. 复合函数的连续性

**性质 2** 如果函数  $u = \varphi(x)$  在点  $x_0$  处连续, 且  $\varphi(x_0) = u_0$ , 而函数  $y = f(u)$  在点  $u_0$  处连续, 那么复合函数  $y = f[\varphi(x)]$  在点  $x_0$  处也连续.

**【例 4】** 判断  $y = \ln \sin x$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  处的连续性.

**【解】** 函数  $u = \sin x$  在  $x = \frac{\pi}{6}$  处连续, 当  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $u = \frac{1}{2}$ ; 函数  $y = \ln u$  在点  $u = \frac{1}{2}$  处连续. 所以, 复合函数  $y = \ln \sin x$  在点  $x = \frac{\pi}{6}$  处也是连续的.

#### 3. 初等函数的连续性

根据初等函数的定义, 由基本初等函数的连续性, 以及连续函数的和、差、积、商的连续性和复合函数的连续性可得到下面的重要结论:

**性质 3** 一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

这个结论对于以后判定函数连续性的一些极限的运算是非常有价值的. 如果已知函数  $f(x)$  是初等函数, 且  $x_0$  属于  $f(x)$  的定义区间, 那么求  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  时, 只需将  $x_0$  代入函数, 求函数值  $f(x_0)$  即可.

**【例 5】** 求  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2 \ln(x-1)}{e^x \sqrt{1+x^2}}$ .

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

**【解】** 因为  $f(x) = \frac{x^2 + 2\ln(x-1)}{e^x \sqrt{1+x^2}}$  是初等函数, 并且它的定义区间为  $(1, +\infty)$ , 而  $2 \in (1, +\infty)$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2\ln(x-1)}{e^x \sqrt{1+x^2}} = \frac{2^2 + 2\ln(2-1)}{e^2 \sqrt{1+2^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5e^2}.$$

### 1.3.3 闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有一些重要的性质, 这些性质在理论和实践中都有着广泛的应用.

**性质 4** 如果函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上一定有最大值与最小值.

如图 1-14 所示, 可以看出, 在  $[a, b]$  上至少有一点  $\xi (a \leq \xi \leq b)$  使得  $f(\xi) = m$  为最小值, 即  $m = f(\xi) \leq f(x) (a \leq x \leq b)$ , 又至少有一点  $\eta (a \leq \eta \leq b)$  使  $f(\eta) = M$  为最大值, 即  $M = f(\eta) \geq f(x) (a \leq x \leq b)$ .

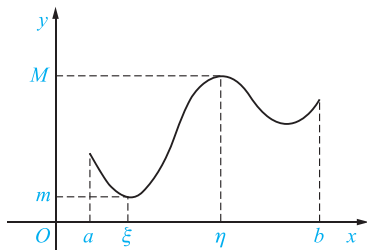


图 1-14

#### 注意

对于在开区间内连续或在闭区间上有间断点的函数, 其最大值、最小值不一定存在. 例如, 函数  $y = x^2 + 1$ , 在  $(-1, 1)$  内连续, 在  $x = 0$  处取得最小值, 但在这个区间内没有最大值; 而在  $(1, 2)$  内既无最大值, 也无最小值.

#### 【例 6】判断函数

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

在闭区间  $[0, 2]$  上是否有最值.

**【解】** 函数  $f(x) = \begin{cases} -x+1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$  在闭区间  $[0, 2]$  上有间断点  $x = 1$ , 所以函数

在该区间上既无最大值又无最小值, 如图 1-15 所示.



**性质 5** 如果函数  $y=f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且在两 endpoint 取不同的函数值  $f(a)=A$  和  $f(b)=B$ ,  $C$  是  $A$  与  $B$  之间的任一数, 那么在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi)=C \quad (a < \xi < b).$$

这就是著名的介值定理, 它的几何意义是: 在  $[a, b]$  上的连续曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=C$  ( $C$  在  $A$  与  $B$  之间) 至少有一个交点, 交点坐标为  $(\xi, f(\xi))$ , 其中  $f(\xi)=C$ , 如图 1-16 所示.

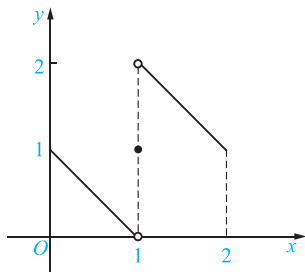


图 1-15

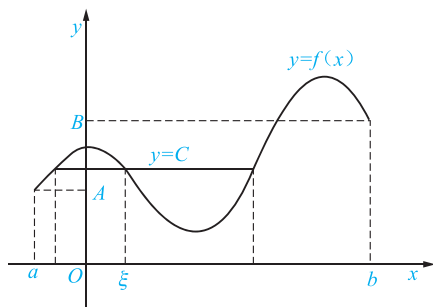


图 1-16

**推论** 如果函数  $y=f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)$  与  $f(b)$  异号, 那么至少存在一点  $\xi$  ( $a < \xi < b$ ), 使得  $f(\xi)=0$ .

推论的几何意义是: 在  $[a, b]$  上连续的曲线  $y=f(x)$  两 endpoint 落在  $x$  轴的上、下两侧时, 则曲线与  $x$  轴至少有一个交点, 如图 1-17 所示.

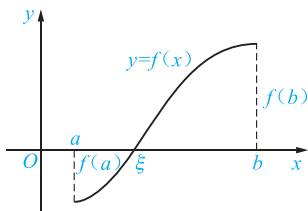


图 1-17

**【例 7】** 证明方程  $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

**【证明】** 设  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ , 因为它在闭区间  $[0, 1]$  上连续, 并且  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(1) = -2 < 0$ , 所以根据推论可知,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ) 使得  $f(\xi) = 0$ , 即

$$\xi^3 - 4\xi^2 + 1 = 0 \quad (0 < \xi < 1).$$

这个等式说明方程  $x^3 - 4x^2 + 1 = 0$  在开区间  $(0, 1)$  内至少有一个实根.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

## 习题 1.3

1. 证明函数  $y=x^2-2x+1$  在点  $x=1$  处连续.
2. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\leq 0 \\ e^x, & x>0 \end{cases}$$

在点  $x=0$  处连续.

3. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x<0 \\ x, & 0\leq x<1 \\ 2-x, & 1\leq x\leq 2 \end{cases}$$

在  $x=0, x=1$  处的连续性.

4. 求下列函数的间断点:

$$(1) f(x)=\frac{x}{x+2};$$

$$(2) f(x)=\frac{e^{x^2}}{1+x};$$

$$(3) f(x)=\begin{cases} 2+x^2, & x\leq 0 \\ \frac{\sin 3x}{x}, & x>0 \end{cases};$$

$$(4) f(x)=\frac{\sqrt{x-3}}{(x+1)(x+2)}.$$

5. 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x\rightarrow 1} \frac{3x^2+1}{x-2};$$

$$(2) \lim_{x\rightarrow \pi} 5\sin \frac{x}{2};$$

$$(3) \lim_{x\rightarrow 0} \sqrt{x^2-3x+2};$$

$$(4) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}.$$

6. 求下列函数的极限:

$$(1) \lim_{x\rightarrow 1} \frac{x^2+\ln(2-x)}{\arctan x};$$

$$(2) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{x^2-\ln(1+x)}{e^x+1};$$

$$(3) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x\rightarrow \infty} \frac{x^2+\cos^2 x-1}{(x+\sin x)^2};$$

$$(5) \lim_{x\rightarrow 1} \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1};$$

$$(6) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{e^x-1}{3x}. (\text{提示: 令 } e^x-1=u)$$

7. 求下列函数的极限:

$$(1) \text{ 设 } f(t)=\frac{\ln(t+\sin 4t)}{10+\cos 3t}+e^{-\frac{1}{t}}, \text{ 求 } \lim_{t\rightarrow \frac{\pi}{4}} f(t);$$

$$(2) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x};$$

$$(3) \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}};$$

$$(4) \lim_{\Delta x\rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x+\Delta x)^2}-\frac{1}{x^2}}{\Delta x}.$$

8. 证明: 方程  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - \frac{1}{2} = 0$  在区间  $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$  内至少有一个实根.
9. 证明: 方程  $x^4 - 3x - 1 = 0$  在区间  $(0, 3)$  内至少有一个实根.

## 1.4 经济学中常用的函数

### 1.4.1 需求函数与供给函数

#### 1. 需求函数

一种商品的市场需求量  $Q$  与该商品的价格  $P$  密切相关, 通常降低商品价格会使需求量增加, 提高商品价格会使需求量减少. 如果不考虑其他因素的影响, 需求量  $Q$  可以看成是价格  $P$  的一元函数, 称为**需求函数**, 记作

$$Q=Q(P).$$

一般来说, 需求函数为价格  $P$  的单调减少函数.

根据市场统计资料, 常见的需求函数有以下几种类型:

- (1) 线性需求函数  $Q=a-bP$  ( $a>0, b>0$ );
- (2) 二次需求函数  $Q=a-bP-cP^2$  ( $a>0, b>0, c>0$ );
- (3) 指数需求函数  $Q=ae^{-bP}$  ( $a>0, b>0$ ).

需求函数  $Q=Q(P)$  的反函数, 就是**价格函数**, 记作

$$P=P(Q),$$

也反映商品的需求与价格的关系.

#### 2. 供给函数

某种商品的市场供给量  $S$  也受商品价格  $P$  的制约, 价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品, 使供给量增加; 反之, 价格下跌将使供给量减少. 供给量  $S$  也可看成价格  $P$  的一元函数, 称为**供给函数**, 记为

$$S=S(P).$$

供给函数为价格  $P$  的单调增加函数.

常见的供给函数有线性函数、二次函数、幂函数、指数函数等. 其中, 线性供给函数为

$$S=-c+dP \quad (c>0, d>0).$$

使某种商品的市场需求量与供给量相等的价格  $P_0$ , 称为**均衡价格**. 当市场价格  $P$  高于均衡价格  $P_0$  时, 供给量将增加而需求量相应地减少, 这时产生的“供大于求”的现象必然使价格  $P$  下降; 当市场价格  $P$  低于均衡价格  $P_0$  时, 供给量将减少而需求量增加, 这时会产生“物资短缺”现象, 从而又使得价格  $P$  上升. 市场价格的调节就是这样来实现的.

**【例 1】** 当鸡蛋收购价为每千克 4.5 元时, 某收购站每月能收购 5 000 kg. 若收购价每千克提高 0.1 元, 则收购量可增加 400 kg, 求鸡蛋的线性供给函数.

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

**【解】** 设鸡蛋的线性供给函数为

$$S = -c + dP,$$

由题意得

$$\begin{cases} 5\,000 = -c + 4.5d \\ 5\,400 = -c + 4.6d \end{cases}$$

解得  $d = 4\,000, c = 13\,000$ , 所求供给函数为

$$S = -13\,000 + 4\,000P.$$

**【例 2】** 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q = 14.5 - 1.5P, S = -7.5 + 4P.$$

求该商品的均衡价格  $P_0$ .

**【解】** 由供需均衡条件  $Q = S$ , 可得

$$14.5 - 1.5P = -7.5 + 4P,$$

因此, 均衡价格为  $P_0 = 4$ .

### 1.4.2 成本函数、平均成本函数

产品的成本一般有两类: 一类随产品的数量变化, 如需要的劳动力、消耗的原料等, 这种生产成本称为可变成本; 另一类成本无论生产水平如何都固定不变, 如房屋、设备的折旧费、保险费等, 称为固定成本. 设  $Q$  为某种产品的产量,  $C$  为生产此种产品的成本, 则用

$$C = C(Q)$$

表示该种产品的成本函数.

设生产每个单位产品的成本为  $a$ , 固定成本为  $C_0$ , 则成本函数为

$$C = C(Q) = aQ + C_0.$$

用  $\bar{C}$  表示生产  $Q$  个单位产品的平均成本, 则

$$\bar{C} = \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$$

表示每单位的平均成本函数. 平均成本函数也用  $AC$  表示.

**【例 3】** 已知某种产品的成本函数为

$$C = C(Q) = 1\,000 + \frac{Q^2}{8},$$

求当生产 100 个该产品时的成本与平均成本函数.

**【解】** 由题意, 产量为 100 时的总成本为

$$C(100) = \left(1\,000 + \frac{Q^2}{8}\right) \Big|_{Q=100} = 1\,000 + \frac{100^2}{8} = 2\,250.$$

平均成本函数为

$$AC = \bar{C}(Q) = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{1\,000 + \frac{Q^2}{8}}{Q} = \frac{Q}{8} + \frac{1\,000}{Q}.$$

### 1.4.3 价格函数、收入函数与利润函数

在消费理论中,需求函数是我们前面讨论的形式

$$Q = f(P).$$

这种形式所强调的是既定价格下的需求量.在厂商理论中,强调的是既定需求下的价格.在这种情况下,价格是需求量的函数,表示为

$$P = P(Q).$$

需要注意的是,需求函数  $Q = f(P)$  与价格函数  $P = P(Q)$  是互为反函数的关系.

对于卖方来说,其销售收入  $R$  就是在需求量(即销售量)为  $Q$  时的价格  $P$  与需求量  $Q$  的乘积,即

$$R = PQ.$$

将价格函数  $P = P(Q)$  代入上式,则收入  $R$  表示为需求量的函数,即

$$R = PQ = QP(Q).$$

将需求函数  $Q = f(P)$  代入  $R = PQ$  中时,收入  $R$  又可表示为价格  $P$  的函数,即

$$R = PQ = Pf(P).$$

**【例 4】** 设对某商品的需求函数为

$$Q = f(P) = 100 - 2P.$$

求当价格为 5 时的收入与需求量为 80 时的收入.

**【解】** 当收入表示为价格的函数时,

$$R = Pf(P) = P(100 - 2P).$$

故价格为 5 时的收入为

$$R|_{P=5} = 5(100 - 2 \times 5) = 450.$$

当收入表示为需求量的函数时,首先求需求函数的反函数即价格函数:

$$P = f^{-1}(Q) = \frac{100 - Q}{2} = 50 - \frac{Q}{2}.$$

$$\text{故 } R = PQ = \left(50 - \frac{Q}{2}\right)Q.$$

故需求量为 80 时的收入为

$$R|_{Q=80} = \left(50 - \frac{80}{2}\right) \times 80 = 800.$$

设总利润为  $L$ , 由于

$$\text{总利润} = \text{总收入} - \text{总成本},$$

故  $L = R - C$ .

当收入  $R$  表示为产量  $Q$  的函数  $R = R(Q)$  时,

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

$$L=L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

若用 $\bar{L}$ 或 $AL$ 表示每单位产量的平均利润,则

$$\bar{L}=\bar{L}(Q)=\frac{L(Q)}{Q}=\frac{R(Q)-C(Q)}{Q}.$$

### 习题 1.4

1. 设某商品的需求量  $Q$  与其价格  $P$  之间的关系是  $3Q+4P=100$ , 求:
  - (1) 需求函数与价格函数;
  - (2) 销售 5 件时的总收入与平均收入.
2. 设生产某商品  $Q$  件时的总成本为

$$C(Q)=20+2Q+\frac{1}{2}Q^2 \text{ (万元)}.$$

假设每销售一件该商品的收入是 20 万元.

- (1) 求生产中的保本产量;
- (2) 若每天至少销售 40 件该产品, 为了不亏本, 单价应定多少合适?



### 复习题 1

1. 求下列函数的定义域:

$$(1) f(x)=\frac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2};$$

$$(2) f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9};$$

$$(3) f(x)=\frac{x+1}{\ln(1-2x)};$$

$$(4) f(x)=\frac{\sin x}{x-|x|};$$

$$(5) f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0<|x|<1 \\ 2, & x=0 \\ \sqrt{x^2-1}, & |x|\geq 1 \end{cases};$$

$$(6) f(x)=\arcsin\frac{x+1}{2}.$$

2. 求下列函数值:

$$(1) f(x)=\frac{1+|x-1|}{x+1}, \text{ 求 } f(-2), f(1), f(0);$$

$$(2) f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-2x}, & x<0 \\ |\sin x|, & x\geq 0 \end{cases}, \text{ 求 } f(-4), f\left(\frac{3}{2}\pi\right), f(x_0+h).$$

3. 将几个简单函数复合成一个复合函数.

$$(1) \text{ 设 } y=f(u)=e^u, u=u(x)=\begin{cases} x, & x\leq 0 \\ \frac{1}{x}, & x>0 \end{cases}, \text{ 写出复合函数 } y=f[u(x)] \text{ 的表达式};$$

$$(2) \text{ 设 } f(x)=5^x, g(x)=\log_5 x, \text{ 写出 } f[g(x)], g[f(x)], f[f(x)], g[g(x)] \text{ 的表达式}.$$

4. 设置中间变量, 将下列复合函数拆开为几个简单函数.

$$(1) y=\sin^2(\omega x+\varphi) (\omega, \varphi \text{ 为常数});$$

$$(2) y=\sqrt{\arctan\sqrt{x}}.$$

5. 下列函数是否具有奇偶性? 如有, 试指出是奇函数还是偶函数.

(1)  $y = x \cos 2x$ ;

(2)  $y = 1 + x^4$ ;

(3)  $y = x e^{-x}$ ;

(4)  $y = \frac{\cos x}{x}$ ;

(5)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;

(6)  $y = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ .

6. 下列函数是否具有周期性? 如有, 试指出其最小正周期.

(1)  $y = 4 \sin \pi x$ ;

(2)  $y = |\sin x|$ ;

(3)  $y = |\sin x| + |\cos x|$ ;

(4)  $y = e^x \cos x$ .

7. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \leq 1 \\ x, & 1 < x < 2 \\ 2x - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

8. 当  $x \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$  时,  $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$  是无穷大.

9. 已知  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , 当  $x \rightarrow 0$  时, 讨论函数  $f(x)$  的极限.

10. 判断下列各题哪些是无穷大, 哪些是无穷小.

(1)  $1 + 2x (x \rightarrow \infty \text{ 时})$ ;

(2)  $\tan x (x \rightarrow 0 \text{ 时})$ ;

(3)  $2^{\frac{1}{x}} (x \rightarrow 0^- \text{ 时})$ ;

(4)  $e^{-x} (x \rightarrow +\infty \text{ 时})$ .

11. 求下列函数的极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^2 + x}$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 8x + 1}{x^2 + x}$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 8x + 5}{x^2 + x}$ ;

(4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x^2 + 3x - 4} \right]$ ;

(5)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - 10^n}{1 + 10^{n+1}}$ ;

(6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 7}{4x - x^2}$ ;

(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 5)$ ;

(8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - 2x^2}}$ ;

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin x}$ ;

(10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1-x}$ ;

(11)  $\lim_{h \rightarrow 0} 4h \cot 3h$ ;

(12)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$ ;

(13)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{x^{-2} + 3\sqrt{x}}{4 - \ln^2(x+1)} + e^{-\frac{1}{x}} \right]$ ;

(14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan x} - 1}$ .

chapter  
01chapter  
02chapter  
03chapter  
04chapter  
05chapter  
06chapter  
07chapter  
08chapter  
09chapter  
10chapter  
11

appendix

answers

12. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x^2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

作出函数  $f(x)$  的图形, 并求: (1) 函数  $f(x)$  的定义域; (2) 函数  $f(x)$  的间断点.

13. 设  $f(x) = \frac{|x|-x}{x}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ , 并判断  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  是否存在.

14. 证明: 方程  $x^5 - 2x - 3 = 0$  在区间  $(1, 2)$  上至少存在一个实根.

15. 已知需求函数为  $Q = \frac{100}{3} - \frac{2}{3}P$ , 供给函数为  $S = -20 + 10P$ . 求市场均衡价格  $P_0$ .