第一章 Chapter 1

函 数

在现实生活中，存在着常量和变量. 变量和变量之间又存在着相互依赖的关系. 而函数就是刻画这种关系的数学模型. 学好函数，我们就可以通过某一事实的信息推测另一事实. 同时，函数是高等数学的主要研究对象，也是高等数学的基本概念.

本章将在中学数学相关函数知识的基础上，进一步研究函数的概念和性质，为微积分的学习打下基础.

第一节　函数的基本概念

一、函数的定义

定义　设 D 是由数组成的集合. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值和它对应,那么将对应法则 f 称为在 D 上从 x 到 y 的一个**函数**,记作 $y=f(x)$,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数的**定义域**.

当 x 取 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的一切数时,对应的函数值集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

在函数的定义中,如果对于每一个 $x\in D$,都有唯一的 y 与它对应,那么这种函数称为**单值函数**,若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值,则这种函数称为**多值函数**. 如 $y=\pm\sqrt{9-x^2}$ 为多值函数,在本书范围内,我们只讨论单值函数.

二、函数的表示法

1. 表格法

表格法是将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法,如三角函数表、常用对数表以及经济分析中的各种统计报表等.

2. 图像法

图像法是用图像表示两个变量的函数关系的方法,如图 1-1 所示.

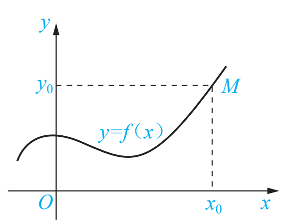


图 1-1

3. 解析法

解析法是用一个等式表示两个变量的函数关系的方法,如 $y=x+3$,$y=\lg(x+2)$等.

下面我们介绍几种常用的用解析法表示的函数.

(1) 分段函数.

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

例如,函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases} \text{ 及 } g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0\\ 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

都是分段函数. 它们的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

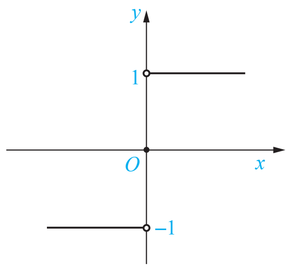


图 1-2

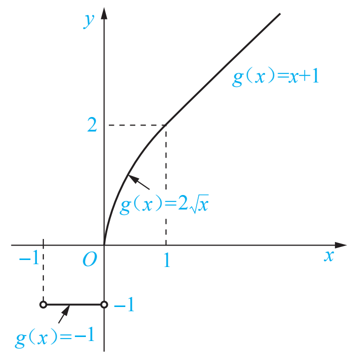


图 1-3

注意

分段函数仍然是一个函数，而不是几个函数.

(2) 隐函数.

如果自变量与因变量的对应关系是用一个方程 $F(x,y)=0$ 确定的，则这种函数称为**隐函数**. 例如 $x^2+y^2=r^2$，$x+y=e^{xy}$ 等，相应地，我们将前面讨论的函数称为**显函数**.

(3) 参数方程所确定的函数.

在许多实际问题中，变量 x 与 y 之间的函数关系还可以用含某一参数的方程组来确定，如

$$\begin{cases} x=t \\ y=1+t \end{cases}$$

其中，t 为参数. 像这样的函数称为由**参数方程所确定的函数**.

【例 1】 设

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x<0 \\ 3, & 0\leqslant x<1 \\ \ln(2x-1), & x\geqslant 1 \end{cases}$$

求 $f(-3)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(1)$，$f(1+h)$.

【解】 $f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3$$

$$f(1)=\ln(2\times 1-1)=\ln 1=0$$

$$f(1+h)=\begin{cases} \sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0 \\ 3, & 0\leqslant 1+h<1 \\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h\geqslant 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1\\ 3, & -1\leqslant h<0\\ \ln(1+2h), & h\geqslant 0\end{cases}$$

三、函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义确定. 当不考虑函数的实际意义，而仅就抽象的解析式来研究函数时，这时定义域就取使解析式有意义的自变量的全体. 要使解析式有意义，我们通常考虑以下几点：

(1) 分式的分母不能为零；

(2) 偶次根式的被开方数必须为非负数；

(3) 对数式中的真数必须大于零；

(4) 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数要考虑各自的定义域；

(5) 若函数表达式由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集；

(6) 分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

【例 2】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(3) $y=\lg\dfrac{x+1}{2}$；　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$.

【解】 (1) 若使函数有意义，则 $x^2+2x+1\neq 0$，即 $(x+1)^2\neq 0$，即 $x\neq -1$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2) 若使函数有意义，则 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x^2-1>0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x>1 \text{ 或 } x<-1\end{cases}$，解得 $1<x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x<-1$. 所以函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

(3) 若使函数有意义，则 $\dfrac{x+1}{2}>0$，即 $x>-1$. 所以函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(4) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1\\ x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是分段函数. 若使函数有意义，则将分段表达式的定义域合在一起，即可得该分段函数的定义域. 所以函数的定义域为 $[0,+\infty)$.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-10}$；　　(2) $y=\log_2\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{x-2}, & x\geqslant 5\\ \dfrac{1}{x-6}, & x<5\end{cases}$；　　(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

chapter 01
chapter 02
chapter 03
chapter 04
chapter 05
chapter 06
chapter 07
chapter 08
chapter 09
chapter 10
chapter 11
chapter 12
answers
appendix

2. 求下列函数的函数值：

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+3}$，求 $f(-1)$，$f(5)$；

(2) $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$，求 sgn2，sgn(−1)，sgn0.

第二节　函数的性质

一、奇偶性

定义 1　设函数的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为**偶函数**. 否则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图像关于原点对称，如图 1-4 所示；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-5所示.

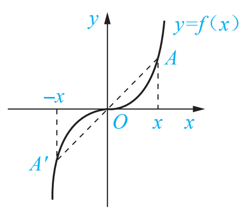


图 1-4

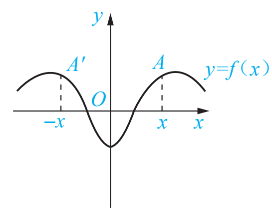


图 1-5

注意

在判断函数的奇偶性时，一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称. 若不关于原点对称，则为非奇非偶函数 .

【例 1】　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2$；　　(2) $f(x)=2\sin 2x$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

【解】　(1) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间，又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=2\sin(-2x)=-2\sin 2x=-f(x)$,所以 $f(x)=2\sin 2x$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(x)$的定义域是 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,定义域不关于原点对称,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$是非奇非偶函数.

(4) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$,所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ 是偶函数.

二、单调性

定义 2 若对于区间 D 内任意的两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,那么$f(x)$在区间 D 上单调增加,称 $f(x)$为 D 上的单调增函数,区间 D 称为 $f(x)$的单调递增区间;特别地,若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$为 D 上的严格增函数. 如果恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,那么 $f(x)$在区间 D 上单调减少,区间 D 称为 $f(x)$的单调递减区间.

单调增函数图像沿 x 轴正向上升,如图 1-6 所示;单调减函数图像沿 x 轴正向下降,如图 1-7 所示.

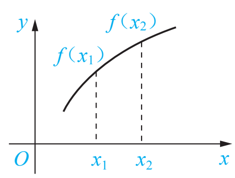


图 1-6

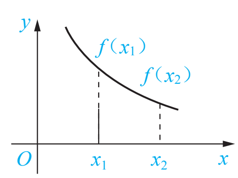


图 1-7

【例 2】 证明 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数,在区间$(-\infty,0)$上是单调递减函数.

【证明】 设 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1{}^2-x_2{}^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$

因为 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$,$x_1<x_2$,所以 $x_1+x_2>0$,$x_1-x_2<0$. 所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

设 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1{}^2-x_2{}^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$.

因为 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$,$x_1<x_2$,所以 $x_1+x_2<0$,$x_1-x_2<0$. 所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$,即 $f(x_1)>f(x_2)$,所以 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调递减函数.

三、有界性

定义 3 设函数 $f(x)$的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1,使得

$$f(x) \leqslant K_1$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界（任何大于 K_1 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的上界）；如果存在数 K_2，使得

$$f(x) \geqslant K_2$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界，K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界（任何大于 K_2 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的下界）；如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

对任意 $x \in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界. 这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $|f(x_1)| > M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

【例 3】 就函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）. 又

$$|\sin x| \leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M，而使 $|f(x)| \leqslant M$ 成立）.

四、周期性

定义 4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意的 $x \in D$，如果存在不为零的数 T，使 $f(x+T)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的周期函数. T 称为 $f(x)$ 的一个周期，并且 nT（n 为非零整数）也是它的周期. 通常，我们把函数的最小正周期称为函数的周期.

【例 4】 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图像分别如图 1-8 和图 1-9 所示.

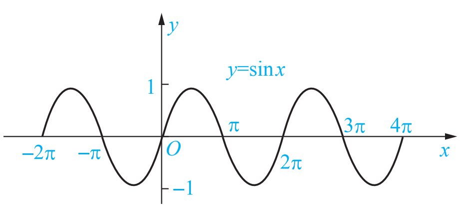


图 1-8

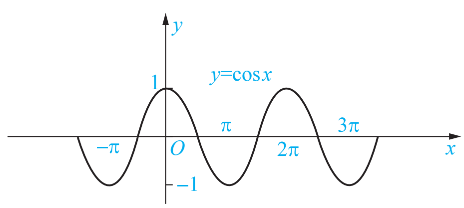


图 1-9

习题 1-2

1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\cos x+3$；　　(2) $y=\lg(1+x)$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$；　　(4) $y=x^2+2x$.

2. 求下列函数的单调区间：

(1) $y=x^2-x$； (2) $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$；

(3) $y=2\log_4 x$； (4) $y=x^2+3x-18(x>-6)$.

3. 下列哪些函数是周期函数？如果是周期函数，请指出其周期：

(1) $y=\sin(2x+3)$； (2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\cos 2x$； (4) $y=\tan\frac{x}{5}$.

4. 下列哪些函数是有界函数？

(1) $y=x^2(-1<x<2)$； (2) $y=\sin 2x$；

(3) $y=\frac{1}{x}$； (4) $y=\log_2 x(x<1)$.

第三节 反 函 数

定义 在函数的定义中，按关系式

$$y=f(x),x\in A,y\in B \tag{1-1}$$

x 是自变量，y 是因变量(函数). 在关系式 $y=f(x)$中，如果反过来，将 y 看成自变量，x 看成因变量(函数)，即对每一个 $y\in B$，按 $y=f(x)$都有唯一确定的 x 值与之对应，则称 **x 是 y 的反函数**. 在求反函数的表达式时，可将关系式 $y=f(x)$看成一个方程式，从中将 x 解出，写作

$$x=\varphi(y),y\in B \tag{1-2}$$

这就是反函数的表达式. 习惯上自变量的记号取作 x，故将式(1-2)中 x，y 记号对换(对应关系不变)，得

$$y=\varphi(x),x\in B \tag{1-3}$$

它仍是 $y=f(x)$的反函数. 若将 φ 记为 f^{-1}，则式(1-3)可写为

$$y=f^{-1}(x),x\in B \tag{1-4}$$

因此，式(1-2)、式(1-3)与式(1-4)都是式(1-1)的反函数，只是用作表示的记号不同而已.

【例】 求下列函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$：

(1) $y=f(x)=e^{x+3}$； (2) $y=f(x)=\frac{x+1}{x-1}$；

(3) $y=f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

【解】 (1) 从 $y=e^{x+3}$中解出 x. 取自然对数得 $\ln y=x+3$，解得 $x=\ln y-3$，再将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln x-3$$

(2) 从 $y=\frac{x+1}{x-1}$中解出 x. 由$(x-1)y=x+1$，整理后得 $x(y-1)=1+y$，解出 $x=$

$\dfrac{y+1}{y-1}$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1}$$

这里，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 就是函数 $y=f(x)$ 本身.

（3）从 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 中解出 x，由于 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$，即

$$(e^x)^2-2ye^x-1=0$$

解得 $e^x=y\pm\sqrt{y^2+1}$，因 $e^x>0$，故舍去负号，即得 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

习题 1-3

1. 求下列函数的反函数：

（1）$y=\dfrac{2x-5}{x-3}$；　　（2）$y=1-3^x$；

（3）$y=1+\lg(x+2)$.

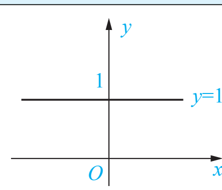
2. 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$ 的反函数，并求其反函数的定义域和值域.

第四节　初 等 函 数

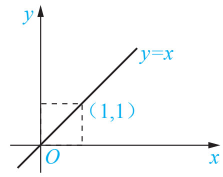
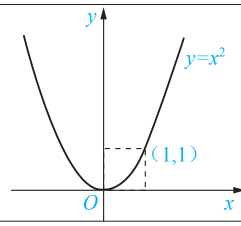
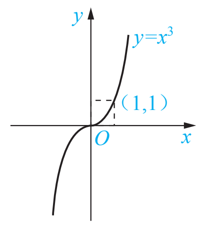
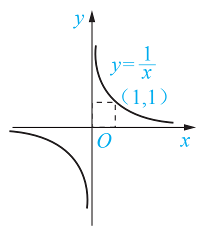
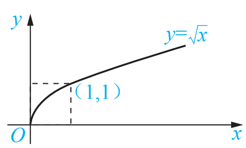
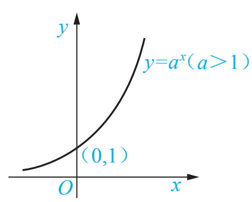
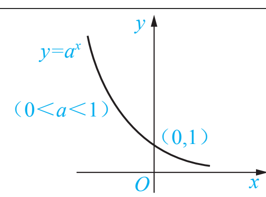
一、基本初等函数

我们把常数函数 $y=c$（c 为常数）、幂函数 $y=x^\alpha$（α 为实数）、指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$，a 为常数）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$，a 为常数）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 为了便于以后的学习，现将几种常见的基本初等函数的定义域、值域、图像和性质列表（表 1-1）如下.

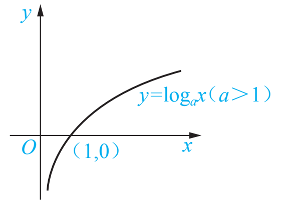
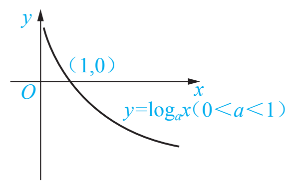
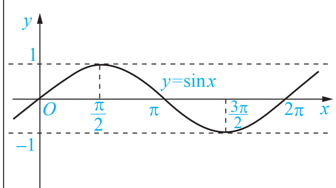
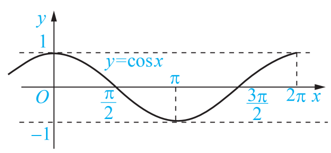
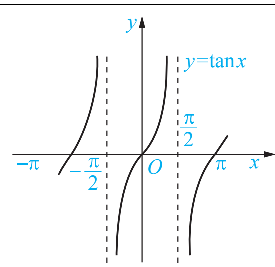
表 1-1

	函数	定义域	值域	图像	性质
常数函数	$y=1$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in\{1\}$		偶函数，有界

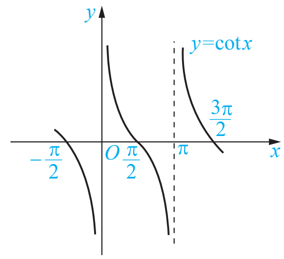
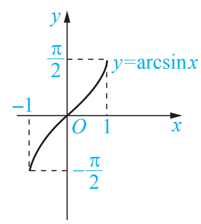
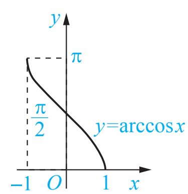
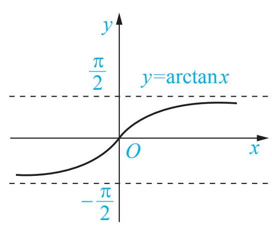
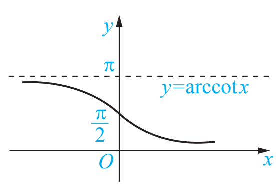
（续表）

	函数	定义域	值域	图像	性质
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0]$内单调减少；在$[0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,0)$内单调减少；在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$		单调减少

（续表）

	函数	定义域	值域	图像	性质
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在（$2k\pi$，$2k\pi+\pi$）内单调减少，在（$2k\pi+\pi$，$2k\pi+2\pi$）内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加

（续表）

	函数	定义域	值域	图像	性质
三角函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$	$y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

二、复合函数

定义 1　若函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，且 $u=g(x)$ 的值域或部分值域包含在 $f(u)$ 的定义域中，则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系，这个对应关系称为 y 是 x 的复合函数，u 是中间变量，x 是自变量，通常将

$$y=f(u),\quad u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)]$$

例如，$y=\sin^2 x$，就是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

同样地，$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为 $[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的一部分.

注意

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数；复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

【例 1】　指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\cos^2 x$；　　(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

【解】　(1) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成的；

(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+2x$ 复合而成的.

【例 2】　设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\log_2 x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$.

【解】　$f[g(x)]=[g(x)]^2=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x$

$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|$

$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4$

三、初等函数

定义 2　基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次的加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，叫做初等函数.

例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 是一个初等函数.

又如，函数 $y=x^x$，由于 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，因此

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

是由 $y=\mathrm{e}^u, u=x\ln x$ 复合而成的函数，因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示，那么它就不是初等函数. 例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 就不是初等函数，我们将这样的函数，叫做**非初等函数**.

【例 3】 已知：(1) $f(2x-1)=x^2$；(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$. 求 $f(x)$.

【解】 (1) 令 $2x-1=t$，解出 $x=\dfrac{1+t}{2}$，由题设，得

$$f(t)=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2=\frac{(1+t)^2}{4}$$

由于函数关系与变量的记号无关，将变量的记号 t 换成 x，得所求函数为

$$f(x)=\frac{(1+x)^2}{4}$$

(2) 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}(t\neq 0)$，由题设，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}$$

将变量的记号 t 换成 x，得所求函数

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$$

注意

函数关系与变量的记号无关. 例如，$f(t)=\dfrac{(1+t)^2}{4}$ 与 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{4}$ 是同一函数.

【例 4】 试设置中间变量，将复合函数 $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$ 分解成若干个简单函数.

【解】 由内层依次到外层，层层设置中间变量，即令

$$v=\frac{x}{2}, u=\sin v$$

于是，函数 $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$ 可写成

$$y=\ln u, u=\sin v, v=\frac{x}{2}$$

其中 u, v 是中间变量.

习题 1-4

1. 设 $y=f(u)=\sqrt{u}, u=\varphi(x)=\ln x$，写出复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式.
2. 设 $y=f(u)=\arctan u, u=\varphi(v)=\sqrt{v}, v=h(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，写出复合函数 $y=f\{\varphi[h(x)]\}$ 的表达式.

3. 将下列复合函数拆开为几个简单函数：

(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$；　　(2) $y=\ln\cos\dfrac{x}{2}$.

复习题一

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln(1-2x)}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-|x|}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0<|x|<1\\ 2, & x=0\\ \sqrt{x^2-1}, & |x|\geqslant 1\end{cases}$；　　(6) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

2. 求下列函数的值：

(1) $f(x)=\dfrac{1+|x-1|}{x+1}$，求 $f(-2)$，$f(1)$，$f(0)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x}, & x<0\\ |\sin x|, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f(-4)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$，$f(x_0+h)$.

3. 将几个简单函数复合成一个复合函数.

(1) 设 $y=f(u)=e^u$，$u=u(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$，写出复合函数 $y=f[u(x)]$的表达式.

(2) 设 $f(x)=5^x$，$g(x)=\log_5 x$，写出 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$的表达式.

4. 设置中间变量，将下列复合函数拆开为几个简单函数：

(1) $y=\sin^2(\omega x+\varphi)$($\omega$，$\varphi$ 为常数)；　　(2) $y=\sqrt{\arctan\sqrt{x}}$.

5. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=x^2$，$x\geqslant 0$；

(3) $y=1+\log_2(x+5)$；　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 0$.

6. 下列函数是否具有奇偶性？如有，试指出是奇函数还是偶函数.

(1) $y=x\cos 2x$；　　(2) $y=1+x^4$；

(3) $y=xe^{-x}$；　　(4) $y=\dfrac{\cos x}{x}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(6) $y=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

7. 下列函数是否具有周期性？如有，试指出其最小正周期.

(1) $y=4\sin\pi x$；　　(2) $y=|\sin x|$；

(3) $y=|\sin x|+|\cos x|$；　　(4) $y=e^x\cos x$.

8. 设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x$，求 $f(x)$，$f(x^2)$.

9. 一圆柱形罐头(有盖)，表面积一定，试将其容积 V 表示为底半径 r 的函数.

10. 某厂生产产品 1 000 t，定价为 130 元/t. 当售出量不超过 700 t 时，按原定价出售；超过 700 t 的部分按原价的九折出售. 试将销售收入表示成销售量的函数.