高等职业教育公共课精品教材

新时代课程思政建设配套教材

# 线 性 代 数

闫杰生　王会英　主编

北京出版集团
北京出版社
北京教育出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数/闫杰生,王会英主编.—北京:北京出版社:北京教育出版社,2022.3
ISBN 978-7-200-17086-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①闫… ②王… Ⅲ.①线性代数—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 035336 号

**线性代数**
闫杰生 王会英 主编
*
北京出版集团
北京出版社 出版
北京教育出版社
(北京北三环中路 6 号)
邮政编码:100120
网址:www.bph.com.cn
京版北教文化传媒股份有限公司总发行
全国各地书店经销
北京盛通印刷股份有限公司印刷
*
889 mm×1 194 mm 16 开本 9.5 印张 260 千字
2022 年 3 月第 1 版 2022 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-200-17086-3
定价:39.00 元
版权所有 翻印必究
质量监督电话:(010)58572525 58572393 购书电话:(010)59812309

# PREFACE 前言

高职高专教育是高等教育不可或缺的一个重要组成部分.高职高专教育的目标是培养社会需要的一线人才,即技术应用型人才,以适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求.

线性代数是高职高专院校一门重要的基础理论课.线性代数的理论与方法已经渗透到现代科学、技术、经济、管理等各个领域,提供描述、处理问题的思想和方法.随着科学技术数学化和计算机的广泛应用,线性代数在现代科技和高等教育中的地位和作用愈显重要.尤其是在计算机日益普及的今天,解决大型线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程人员经常遇到的问题,这就要求学生掌握线性代数的基础知识.

本书是按照新形势下教材改革的精神,遵循高职高专教育线性代数课程教学基本要求而编写的,在编写的过程中力求体现以下几个特点.

(1) 以矩阵作为贯穿全书的主线,将有关概念与方法的处理加以创新,对行列式、矩阵的秩、线性方程组的解法及二次型变换等理论与计算均以全新的观点进行处理.

(2) 融合课程思政理念,设计了"育人目标""思政元素""思政园地"等模块,旨在坚定学生理想信念、厚植爱国主义情怀、加强品德修养、增长知识见识、培养奋斗精神,提升学生综合素质.

(3) 在内容上力求通俗易懂、逻辑清晰,尽可能通过实际背景引入数学概念;在表达上简单明快,注意前后联系,使知识结构在逻辑上严密自然,恰当把握其深度与广度,便于学生理解和掌握.

(4) 例题丰富,较详尽地进行了方法、步骤的归纳,着重介绍解题思路.每节配有习题,每章都有本章小结和复习题,可帮助学生巩固所学知识,提高利用线性代数分析问题和解决问题的能力.

全书共分为5章,包括行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵及二次型、向量空间及线性变换.

本书可作为高职高专院校公共基础课教材,也可作为广大青年朋友学习线性代数的参考用书.

在本书的编写过程中,我们参阅了一些有关线性代数的书籍,并引用了其中的一些资料,在此向作者深表感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见,以便修订时完善.

编　者

# 目录

CONTENTS

CONTENTS

# 第一章 行列式

## 育人目标

◎ 了解行列式思想产生的起源，培养民族自豪感及爱国热情.

◎ 探索行列式的发展史，激发学习热情.

## 本章导读

行列式是线性方程组理论的一个组成部分，是中学数学的提高和推广，也是一种重要的数学工具. 除此之外，行列式在许多理论和实际问题中也发挥着重要作用.

本章将主要介绍行列式的定义、基本性质、计算方法及行列式在求解线性方程组中的应用.

# 第一节 行列式的定义

**思政元素**

行列式的概念究竟是如何形成的呢？可以从中国古代数学中得到答案.中国古代数学中的方程术与线性方程组消元法的思想、方法，对行列式的发展有一定的影响，尤其是“天元术”和“四元术”提出了更为普遍的方程法，为中国数学在代数符号化方面起到了推进作用，由此可见中国古代人民的伟大智慧.

## 一、二阶和三阶行列式

行列式这个概念究竟是如何形成的呢？这就得从求解方程个数和未知量个数相等的一次(线性)方程组入手.

在初等代数中，用加、减消元法求解一个二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

的具体步骤是：先从方程组(1.1)里消去 $x_2$ 而求得 $x_1$，这只要将方程组(1.1)的第 1、第 2 两个式子分别乘以 $a_{22}$ 与 $-a_{12}$，然后相加，就得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

同理，也可以从方程组(1.1)里消去 $x_1$ 而求得 $x_2$，这只要将方程组(1.1)的第 1、第 2 两个式子分别乘以 $-a_{21}$ 与 $a_{11}$，然后相加，得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

即

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \end{cases}$$

如果未知量 $x_1, x_2$ 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，那么，这个线性方程组(1.1)有唯一解：

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了便于使用与记忆，引进二阶行列式的概念.

如果把线性方程组(1.1)中未知量 $x_1, x_2$ 的系数按原来的位置写成两行两列的数表，并用两根竖线加以标出，那么，便得到一个二阶行列式，对此除引入字母 $D$ 作为记号外，还规定：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

式(1.2)最右边的式子称为**二阶行列式 $D$ 的展开式**.

于是，线性方程组(1.1)的解可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

则线性方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

由此可见，二阶行列式的引入与二元一次方程组有关，它表示排成两行两列的 4 个数在规定运算下得到的一个数值.

类似地，对于三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

为了简单地表达它的解，引进三阶行列式的概念. 三阶行列式就是排成三行、三列的 9 个数的一张数表，其展开式规定为

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

**【例 1】** 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

**【解】**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 0 & 9 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}&=(-1)^{1+1}\times(-1)\begin{vmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\times 6\begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\times 7\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &=(-1)\times(0\times 5-9\times 1)-6\times(4\times 5-9\times 2)+7\times(4\times 1-0\times 2) \\ &=9-12+28=25. \end{aligned}$$

所以，三阶行列式也是在规定运算下的一个数值，它可转化为二阶行列式再计算得到. 三阶行列式可以用来表达三元一次方程组(1.4)的解. 如果方程组(1.4)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程组有唯一解，其解同样可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.5}$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

在方程组(1.4)的解的表达式(1.5)中，$x_i(i=1,2,3)$的分母均是方程组(1.4)的系数行列式 $D$，$x_i(i=1,2,3)$的分子是将系数行列式 $D$ 中的第 $i$ 列换成方程组(1.4)中的常数项，其余列不动所得到的行列式，并简记为 $D_i(i=1,2,3)$.

**【例 2】** 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2, \\ -2x_1+x_2-x_3=-1, \\ x_1+3x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

**【解】** 方程组的系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

又计算得

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=5,\ D_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2,\ D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-23,$$

所以方程组的解是

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{11},\ x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{2}{11},\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{23}{11}.$$

显然，对于未知数个数等于方程个数的二元、三元线性方程组，当它们的系数行列式不等于零时，利用行列式这一工具求解十分简便，结果也容易记忆. 因此想到：对于未知数的个数等于方程的个数的 $n(n>3)$元线性方程组，是否也有类似的结果？这就需要引入$n(n>3)$阶行列式的定义.

## 二、$n$ 阶行列式的定义

行列式的定义

前面首先定义了二阶行列式，并指出了三阶行列式可通过转化为二阶行列式来计算. 下面，按照这种思路给出 $n$ 阶行列式的一种归纳定义.

**定义 1** 由 $n^2$ 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的记号

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **$n$ 阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列**．它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数．

当 $n=1$ 时，

$$D_1=|a_{11}|=a_{11}.$$

当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

当 $n=3$ 时，

$$\begin{aligned} D_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

需要指出的是：当 $n=1,2,3$ 时，可以利用上述规定求行列式的值，但是当 $n>3$ 时，如何求解呢？为了寻求普遍有效的展开方法，下面介绍行列式元素的余子式与代数余子式的概念．

**定义 2** 在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，划去元素 $a_{ij}$ 所在第 $i$ 行、第 $j$ 列的元素，剩余元素按原顺序组成的一个 $(n-1)$ 阶行列式，称为 $a_{ij}$ 的**余子式**，记为 $M_{ij}$．在 $M_{ij}$ 前乘上 $(-1)^{i+j}$，称为 $a_{ij}$ 的**代数余子式**，记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$．

例如，在四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中，元素 $a_{32}$ 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}.$$

**定理** 行列式 $D$ 等于它的任意一行（列）所有元素与其对应代数余子式的乘积之和．设 $D$ 的第 $i$ 行元素 $a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}$ 对应的代数余子式分别是 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{in}$，则

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ (i=1,2,\cdots,n). \tag{1.6}$$

式(1.6)称为行列式 $D$ 按第 $i$ 行展开的展开式．若按第 $j$ 列展开，则展开式为

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n). \tag{1.7}$$

**【例 3】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$．

**【解】** 由行列式的定理，得

$$D=3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+(-5)\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=3\times\left(1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right)+$$

$$5\times\left((-4)\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\right)$$

$$=3\times[-7+2(-10-28)]+5\times[(-4)\times(-10-28)-(-12+21)]=466.$$

【例 4】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&0&0\\0&0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0&0\\0&0&a_{43}&0\end{vmatrix}$.

【解】 由行列式的定理,得

$$D=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0\\0&a_{43}&0\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{31}&0\\0&a_{43}\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

【例 5】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&2&0&8\\4&-9&2&10\\-1&6&0&-7\\0&0&0&5\end{vmatrix}$.

【解】 因为第三列中有三个零元素,可按第三列展开,得

$$D=2\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&2&8\\-1&6&-7\\0&0&5\end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式,按第三行展开,得

$$D=-2\times5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&6\end{vmatrix}=-200.$$

**注　意**

计算行列式时,选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算,这是计算行列式的常用技巧之一.

## 三、几个常用的特殊行列式

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 与 } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为上三角行列式与下三角行列式，其特点是主对角线以下（上）的元素全为零.

先来计算下三角行列式的值. 根据 $n$ 阶行列式的定义，每次均通过按第一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第一行都仅有第一项不为零，故有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

对上三角行列式，可以每次通过按最后一行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次最后一行都仅有最后一项不为零，同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，非主对角线上元素全为零的行列式称为对角行列式，易知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

综上所述可知，上、下三角行列式和对角行列式的值都等于其主对角线上元素的乘积.

## 习题1-1

1. 计算下列二阶行列式.

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；　　（3）$\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 9 \\ -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 4 & 6 & -7 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$；　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 2 和 $-2$ 的代数余子式.

4. 已知四阶行列式 $D$ 中的第 3 列元素依次为 $-1,2,0,1$，它们的余子式依次为 $5,3,-7,4$，求 $D$.

5. 证明：$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$.

# 第二节 行列式的性质及计算

行列式的奥妙在于对行列式的行或列进行了某些变换[如行与列互换、交换两行(列)位置、某行(列)乘以某个数、某行(列)乘以某个数后加到另一行(列)等]后，行列式虽然会发生相应的变化，但变换前后两个行列式的值却仍保持着线性关系，这意味着，可以利用这些关系大大简化高阶行列式的计算. 本节首先讨论行列式在这些方面的重要性质，然后进一步讨论如何利用这些性质计算高阶行列式的值.

## 一、行列式的性质

行列式的性质

将行列式 $D$ 的行与列互换后得到的行列式，称为 $D$ 的**转置行列式**，记为 $D^{\mathrm{T}}$ 或 $D'$，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**性质 1** 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

**注　意**

由性质 1 可知，行列式中的行与列具有相同的地位，行列式的行具有的性质，它的列同样具有．

**性质 2**　交换行列式的两行(列)，行列式变号．

**注　意**

交换 $i,j$ 两行(列)记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$．

**推论 1**　若行列式中有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零．

**证明**　互换 $D$ 中相同的两行(列)，有 $D=-D$，故 $D=0$．

**性质 3**　用数 $k$ 乘行列式的某一行(列)，等于用数 $k$ 乘此行列式．

例如，行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

**注　意**

第 $i$ 行(列)乘以 $k$，记为 $r_i \times k(c_i \times k)$．

**推论 2**　行列式的某一行(列)中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．

**推论 3**　行列式中若有两行(列)元素成比例，则此行列式为零．

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$，因为第一列与第二列对应元素成比例，根据推论 3，可直接得到

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

【例 1】 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

【解】

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\times(-3)\times5\times1=30.$$

性质 4　若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可以写成两个行列式之和.这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同.

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5　将行列式的某一行(列)的所有元素都乘以数 $k$ 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变.

以三阶行列式为例,将数 $k$ 乘第一行加到第二行上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

此性质可由性质 4 和推论 3 证得.

**注　意**

第 $j$ 行(列)乘以 $k$ 加到第 $i$ 行(列)上,记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

## 二、利用“三角化”计算行列式

行列式的计算

计算行列式时，常用行列式的性质，把它转化为三角行列式来计算. 例如，化为上三角行列式的步骤是：如果第一列第一个元素为 0，先将第一行与其他行交换，使得第一列第一个元素不为 0，然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行，使得第一列除第一个元素外其余元素全为 0；再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶行列式；如此继续下去，直至使它成为上三角行列式，这时主对角线上元素的乘积就是所求行列式的值.

**【例 2】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

**【解】**

$$D \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1,\, r_4+5r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+4r_2,\, r_4-8r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

**【例 3】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

**【解】** 注意到行列式中各行(列)4 个数之和都为 6. 故可把 2，3，4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第 1 行，化为上三角行列式来计算：

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_1,\, r_3-r_1,\, r_4-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

**注　意**

仿照上述方法可得到更一般的结果：

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

**【例 4】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

**【解】** 根据行列式的特点，可将第 1 列加至第 2 列，然后第 2 列加至第 3 列，再将第 3 列加至第 4 列，目的是使 $D$ 中的零元素增多.

$$D\xlongequal{c_2+c_1}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & -a_3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_4+c_3}\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=4a_1a_2a_3.$$

**【例 5】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

**【解】** 从第 4 行开始，后一行减前一行.

$$D\xlongequal{r_4-r_3,r_3-r_2,r_2-r_1}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3,r_3-r_2}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4.$$

此外，在行列式的计算中，还将行列式的性质与行列式按行(列)展开的方法结合起来使用. 一般可先用行列式的性质将行列式中某一行(列)化为仅含有一个非零元素，再将行列式按此行(列)展开，化为低一阶的行列式，如此继续下去，直到化为二阶行列式为止.

**注　意**

按行(列)展开计算行列式的方法称为降阶法.

【例 6】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+2r_3,r_4+2r_3}\begin{vmatrix}7&0&1&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\7&0&-2&-5\end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7&1&4\\1&1&2\\7&-2&-5\end{vmatrix}\xlongequal{r_1-r_2,r_3+2r_2}\begin{vmatrix}6&0&2\\1&1&2\\9&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}6&2\\9&-1\end{vmatrix}=-6-18=-24.$$

【例 7】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&-1&0\\1&7&2&5\\2&-2&3&0\\6&-4&-1&0\end{vmatrix}$.

【解】

$$D=\begin{vmatrix}2&3&-1&0\\1&7&2&5\\2&-2&3&0\\6&-4&-1&0\end{vmatrix}=5\times(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2&3&-1\\2&-2&3\\6&-4&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_1,r_3-3r_1}5\begin{vmatrix}2&3&-1\\0&-5&4\\0&-13&2\end{vmatrix}=5\times2\begin{vmatrix}-5&4\\-13&2\end{vmatrix}$$

$$=10\times(-10+52)=420.$$

【例 8】 证明 $n$ 阶范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j).$$

其中记号 $\prod$ 表示全体同类因子的乘积.

【证明】 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$，结论成立.

假设对 $n-1$ 阶成立，要证明对 $n$ 阶时结论也成立. 为此，设法把 $D_n$ 降阶. 将 $D_n$ 从最后一行开始，从下到上顺次后行减去前行的 $a_1$ 倍，得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1\\ 0 & a_2(a_2-a_1) & \cdots & a_n(a_n-a_1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a_2^{n-2}(a_2-a_1) & \cdots & a_n^{n-2}(a_n-a_1)\end{vmatrix},$$

将上面的行列式按第 1 列展开，然后把每一列的公因子 $(a_i-a_1)(i=2,3,\cdots,n)$ 提出来，就有

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

上式右端的行列式是 $n-1$ 阶范德蒙行列式，按归纳法假设知，它等于

$$\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

所以

$$D_n=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j). \tag{1.8}$$

这就是著名的范德蒙行列式，其结果在行列式的计算中可作为公式使用.

计算行列式的方法很多，也很灵活. 要掌握行列式的计算方法，应加强练习，在练习中总结经验.

## 思政元素

行列式理论发展史的研究，是整个数学史研究中不可或缺的一环. 行列式理论发展过程中建立起来的优美简洁、富有启示的记号，对认识代数符号在数学发展中所起的作用具有示范意义. 正如法国数学家拉普拉斯所说："这就是结构好的语言的好处，它简化的记法常常是深奥理论的源泉."符号的创新使用对行列式理论历史的研究所产生的学术意义是毋庸置疑的. 如今是一个创新的时代，年轻的一代人要向前辈学习，要勇于创新，敢于探索，为实现强国梦贡献自己的力量.

## 习题1-2

1. 用行列式的性质计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}7 & 10 & 13\\ 8 & 11 & 14\\ 9 & 12 & 15\end{vmatrix}$；  (2) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}$；  (3) $\begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & 0\\ 5 & 1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 3 & 1\end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 34\ 215 & 35\ 215 \\ 28\ 092 & 29\ 092 \end{vmatrix}$；(5) $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}$；(6) $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$.

2. 用行列式的性质证明等式：

$$\begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ x+y & y+z & z+x \\ z+x & x+y & y+z \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

3. 用降阶法计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & a \\ a & 0 & a & b \\ b & a & 0 & a \\ a & b & a & 0 \end{vmatrix}$.

## 第三节　克拉默法则

对三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

在其系数行列式 $D\neq 0$ 的条件下，有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

那么，对于更一般的线性方程组是否有类似的结果？答案是肯定的.在引入克拉默法则之前，先介绍有关 $n$ 阶线性方程组的概念.含有 $n$ 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1.9}$$

称为 **$n$ 元线性方程组**.当其右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时，线性方程组(1.9)称为**非齐次线性方**

程组，当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时，线性方程组(1.9)称为齐次线性方程组，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0. \end{cases} \tag{1.10}$$

线性方程组(1.9)的系数 $a_{ij}$ 构成的行列式称为该方程组的系数行列式 $D$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**定理 1(克拉默法则)** 若线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组(1.9)有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n), \tag{1.11}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把 $D$ 中第 $j$ 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 相应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$，而其余各列保持不变所得到的行列式.

**【例 1】** 用克拉默法则解方程组 $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

**【解】** $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1-2r_2,r_4-r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+2c_2,c_3+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27.$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81, D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27, D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{81}{27}=3,x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-108}{27}=-4,$$

$$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-27}{27}=-1,x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{27}{27}=1.$$

一般来说，用克拉默法则求线性方程组的解时，计算量是比较大的. 对具体的数字线性方程组，当未知数较多时往往可用计算机来求解. 目前用计算机解线性方程组已经有了一套成熟的方法.

克拉默法则在一定条件下给出了线性方程组解的存在性、唯一性，与其在计算方面的作用相比，克拉默法则更具有重大的理论价值. 撇开求解公式(1.11)，克拉默法则可叙述为下面的定理.

**定理 2**　如果线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组(1.9)一定有解，且解是唯一的.

在解题或证明中，常用到定理 2 的逆否定理：

**定理 2′**　如果线性方程组(1.9)无解或解不是唯一的，则它的系数行列式必为零.

对齐次线性方程组(1.10)，易见 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是该方程组的解，称其为齐次线性方程组(1.10)的**零解**. 把定理 2 应用于齐次线性方程组(1.10)，可得到下列定理.

**定理 3**　如果齐次线性方程组(1.10)的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组(1.10)只有零解.

**定理 3′**　如果齐次线性方程组(1.10)有非零解，则它的系数行列式 $D=0$.

**注　意**

今后还将进一步证明，如果齐次线性方程组的系数行列式 $D=0$，则齐次线性方程组(1.10)有非零解.

**【例 2】**　判断齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=0,\\x_1+2x_2+3x_3-x_4=0,\\3x_1-x_2-x_3-2x_4=0,\\2x_1+3x_2-x_3-x_4=0\end{cases}$是否有非零解.

**【解】**　因为系数行列式$\begin{vmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&-1\\3&-1&-1&-2\\2&3&-1&-1\end{vmatrix}=-153\neq 0$，所以该方程组只有零解.

**【例 3】**　当 $\lambda$ 为何值时，齐次线性方程组$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$有非零解？

**【解】**　由定理 3′知，若所给齐次线性方程组有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda&-3+\lambda&4\\2&1-\lambda&1\\1&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}+(1-\lambda)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1-\lambda&4\\1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)[-2(1-\lambda)+1]+(1-\lambda)[(1-\lambda)^2-4]$$
$$=(1-\lambda)^3+2(1-\lambda)^2+\lambda-3$$
$$=\lambda(\lambda-2)(3-\lambda).$$

如果齐次线性方程组有非零解，则 $D=0$，即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$ 时，齐次线性方程组有非零解.

## 习题1-3

1. 用克拉默法则解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases}2x+y+3z=9,\\3x-5y+z=-4,\\4x-7y+z=5;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x+5y+4z=10,\\x+3y+2z=6,\\2x+10y+9z=20;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+x_4=5,\\3x_1-7x_2+3x_3-x_4=-1,\\5x_1-9x_2+6x_3+2x_4=7,\\4x_1-6x_2+3x_3+x_4=8;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3+5x_4=7,\\x_1-2x_2-2x_3-3x_4=3,\\3x_1-x_2+2x_3=-1,\\2x_1+3x_2+2x_3-8x_4=-7.\end{cases}$

2. 判断齐次线性方程组 $\begin{cases}2x_1+2x_2-x_3=0,\\x_1-2x_2+4x_3=0,\\5x_1+8x_2-2x_3=0\end{cases}$ 是否仅有零解.

3. 当 $\lambda,\mu$ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+\mu x_2+x_3=0,\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

## 本章小结

**一、基本概念**

$n$ 阶行列式，余子式，代数余子式，转置行列式，对角行列式，上（下）三角行列式.

**二、基本内容**

1. $n$ 阶行列式的展开式

$n$ 阶行列式等于它的任意一行（列）所有元素与其对应代数余子式的乘积之和.

2. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式变号.

推论 1　若行列式中有两行（列）的对应元素相同，则此行列式为零.

性质 3　用数 $k$ 乘行列式的某一行（列），等于用数 $k$ 乘此行列式.

推论 2　行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 3　行列式中若有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

性质 4　若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式分别以这两个数为所在行（列）对应位置的元素，其他位置的元素与原行列式相同.

性质 5　将行列式的某一行（列）的所有元素都乘以数 $k$ 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变.

3. 克拉默法则

若线性方程组的系数行列式 $D\neq0$，则线性方程组有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D}(j=1,2,\cdots,n),$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$是把 $D$ 中第 $j$ 列元素 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{nj}$ 相应地换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$,而其余各列保持不变所得到的行列式.

**三、基本方法**

计算行列式的方法:按一行(列)展开法,化上(下)三角行列式法.

## 复习题一

1. 用二、三阶行列式解下列方程组.

(1) $\begin{cases}7x+8y=6,\\3x-5y=11;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}6x_1-4x_2=10,\\5x_1+7x_2=29;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+3y-z=-4,\\x-y+z=5,\\7x-6y-4z=1;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x_1+2x_2+4x_3=31,\\5x_1+x_2+2x_3=29,\\3x_1-x_2+x_3=10.\end{cases}$

2. 求出行列式 $\begin{vmatrix}5x&1&3x\\x&x&1\\1&2&x\end{vmatrix}$ 中包含 $x^2$ 和 $x^3$ 的项.

3. 在一个 $n$ 阶行列式中等于零的元素如果比 $n^2-n$ 还多,那么这个行列式的值等于多少?试说明理由.

4. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix}1&-1&2\\3&2&1\\0&1&4\end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix}2&0&3\\7&1&6\\6&0&5\end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix}a+x&x&x\\x&b+x&x\\x&x&c+x\end{vmatrix}$; (4) $\begin{vmatrix}\alpha^2+1&\alpha\beta&\alpha\gamma\\\alpha\beta&\beta^2+1&\beta\gamma\\\alpha\gamma&\beta\gamma&\gamma^2+1\end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$; (6) $\begin{vmatrix}3&2&2&\cdots&2\\2&3&2&\cdots&2\\2&2&3&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\2&2&2&\cdots&3\end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\-1&0&3&\cdots&n\\-1&-2&0&\cdots&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\-1&-2&-3&\cdots&0\end{vmatrix}$; (8) $\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_{n-1}&a_{n-1}^2&\cdots&a_{n-1}^{n-1}\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$;

(9) $\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&a_1&0&\cdots&0\\1&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}(a_i\neq0,i=1,2,\cdots,n)$.

5. 证明下列恒等式.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$;

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$.

6. 用克拉默法则解下列线性方程组.

(1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=1, \\ x_1+x_2+2x_3=2, \\ x_1+x_2+x_3=3; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8, \\ x_1-3x_2-6x_4=9, \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5, \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

7. 判断下列齐次线性方程组是否有唯一解.

(1) $\begin{cases} 3x-2y+z=0, \\ x-z=0, \\ 2x+y+z=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+4y-2z+3t=0, \\ 5x-y+z+2t=0, \\ 7x+7y-3z+8t=0, \\ 4y+5z-t=0. \end{cases}$

## 思政园地 ★

### 中国古代的“天元术”与“四元术”

“天元术”是一种用数学文字符号列方程的方法. 用天元术列方程的方法是首先“立天元一为某某”，相当于“设 $x$ 为某某”，再根据问题给出的条件列出两个相等的多项式，然后令两者相减得到一个一端为零的方程，这种方法一般称为“同数相减”或“如积相消”. 在中国，列方程的思想可追溯到汉代的《九章算术》，书中用文字叙述的方法建立了二次方程，但没有明确未知数的概念. 天元术的使用，带来了两种结果：一种是数学代数化程度的提高，另一种是数量关系的复杂化. 于是，当问题中不止包含一个未知数时，天元术就自然地被二元、三元以及四元的高次联立方程组所代替，至此产生了四元术(四次联立方程组)，这也是我国古代数学家继天元术之后的又一杰出创造. 与天元术和四元术的创立相伴而生的是多项式的概念、表达方式、运算法则以及一般消元法的建立. 到元代朱世杰的《四元玉鉴》已经可解四个未知数的高次联立方程组. 由于我国古代不用笔算，而用算筹，计算须在算筹板上进行，所以古代方程运算才局限于四个未知数. 就其理论和方法的实质而论，是可以推行至多元任意高次联立方程组的.

**讨论：**

1. 从以上材料中，你学到了什么？
2. 中国古代列方程的思想诞生于什么时候？其在世界数学发展史上起到了什么作用？