高等教育立体化精品教材
“互联网+”新形态教材

高等数学
（下册）

主编　常安成　耿　晶

西北工業大學出版社
西　安

【内容简介】 本书以“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为标准，以提高学生的数学素质与创新能力为目的，紧密结合高等院校高等数学教学现状和教学理念进行编写. 本书分为上、下两册. 上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用. 下册内容包括向量代数与解析几何、多元函数微积分、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程与差分方程、无穷级数.

本书可作为高等院校高等数学课程教材或教学参考书，也可供其他有关专业人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 常安成，耿晶主编. —西安：西北工业大学出版社，2021.8

ISBN 978-7-5612-7857-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①常… ②耿… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2021)第 159549 号

GAODENG SHUXUE (XIACE)

高等数学(下册)

责任编辑：王 静

责任校对：孙 倩　　　装帧设计：易 帅

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　　　邮编：710072

电　　话：(029)88491757，88493844

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：天津市蓟县宏图印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　　　1/16

印　　张：14.5

字　　数：308 千字

版　　次：2021 年 8 月第 1 版　　　2021 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：48.00 元

如有印装问题请与出版社联系调换

前　　言

高等数学是普通高等院校的重要基础课程.本书以“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为标准,以提高学生的数学素质与创新能力为目的,紧密结合普通高等院校高等数学教学现状和教学理念进行编写.

本书以“培养学生理性思维能力”为重点,以“坚持改革、不断锤炼、打造精品”为原则,突出了重基础、重应用、求创新的思路,着重讲解基本概念、基本理论和基本方法,培养学生的计算能力及解决实际问题的能力,力求贴近实际、激发学生自主学习热情.在编写本书的过程中,特别注意了以下几个方面.

(1)突出高等数学的基本思想和基本方法,注重学生数学思想方法的培养,让学生能够体会到高等数学的本质和高等数学的作用.

(2)在不失严谨的基础上,加强通俗性和直观性,在编排上尽可能做到逻辑清晰、重点突出、叙述详细,并力求由浅入深,通俗易懂.

(3)从实际问题出发,自然而然地引出基本概念.

本书分为上、下两册.上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用.下册内容包括向量代数与解析几何、多元函数微积分、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程与差分方程、无穷级数.标*的章节为选修内容.

本书下册由常安成、耿晶担任主编.其中,常安成编写了第7～9章,耿晶编写了第10～12章及答案.

在编写本书的过程中,参考了相关资料,在此,谨对其作者表示诚挚的谢意.

限于水平,书中难免有不足之处,恳请读者批评指正.

编　者

2021年5月

目　　录

第7章 向量代数与解析几何

向量代数不仅是研究空间解析几何以及后续的多元函数微积分学必不可少的基础知识，而且还是学习数学、力学、电学的必备知识，也是学习工程技术科学和管理科学的有力工具.其主要内容是向量的定义、向量的代数运算的定义和规则.

空间解析几何同样也是多元函数微积分学必不可少的基础知识.空间解析几何与平面几何类似，通过建立空间坐标系，把空间的每一个点与一个有序三元数组对应，图形与方程对应，从而把几何问题转化为代数问题.

微课

空间直角坐标系

7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系的建立

在平面几何中，笛卡儿建立了平面直角坐标系，给出了平面上的点与有序实数对 (x,y) 的一一对应关系，把曲线与方程对应.同样，空间内的点也可以与一个三元实数对相对应，从而建立代数与几何的直观联系.

在空间以点 O 为公共原点作三条两两互相垂直，且具有相同的长度单位的数轴 Ox，Oy 和 Oz，这就建立了一个空间直角坐标系，记为 $Oxyz$ 或$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$.数轴 Ox，Oy 和 Oz（简称 x 轴，y 轴和 z 轴）称为坐标轴，各轴的正向符合右手法则，即当右手的四个手指从 x 轴正向以 $\pi/2$ 角转向 y 轴正向握拳时，大拇指的指向就是 z 轴的正方向.它们的公共原点 O 称为坐标原点；每两条坐标轴所在的平面，即平面 xOy、平面 yOz 和平面 zOx，称为坐标平面，简记为 xy 面，yz 面和 zx 面，如图 7-1-1 所示.

如图 7-1-2 所示，三个坐标平面把整个空间分成八个部分，每个部分称为卦限.

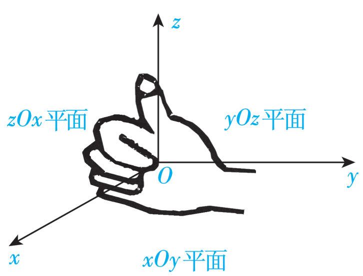

图 7-1-1

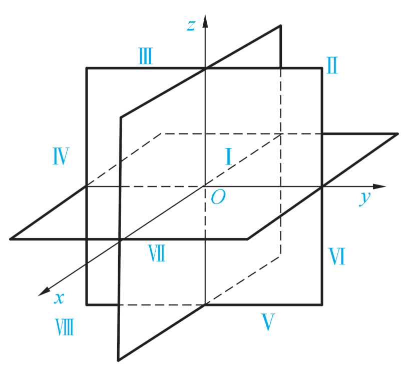

图 7-1-2

第一、二、三、四卦限在坐标平面 xOy 之上,其顺序与坐标平面 xOy 上各象限的顺序相同,而第五、六、七、八卦限在坐标平面 xOy 之下,依次排在第一、二、三、四卦限的下面.这八个卦限分别用罗马字母Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ来表示.

7.1.2 空间点的坐标

设点 P 为空间的一点,过点 P 分别作垂直于 x 轴,y 轴和 z 轴的三个平面,它们与三个坐标轴分别相交于 A,B 和 C 三个点(见图 7-1-3).若点 A,B 和 C 在三个轴上的坐标分别为 x,y 和 z,则三个有序数组 x,y 和 z 称为点 P 的坐标,记为 $P(x,y,z)$,其中数 x 称为点 P 的横坐标,数 y 称为点 P 的纵坐标,数 z 称为点 P 的竖坐标.反过来,若任意给定三个有序数组 x,y 和 z,在 x 轴,y 轴和 z 轴上分别取坐标为 x,y 和 z 的三个点 A,B 和 C,再过点 A,B 和 C 分别作垂直于 x 轴,y 轴和 z 轴的平面,则这三个平面的交点 P 就是由三个有序数组 x,y 和 z 所唯一确定的点,其坐标为 (x,y,z).因此,空间的点 P 就和三个有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应的关系.

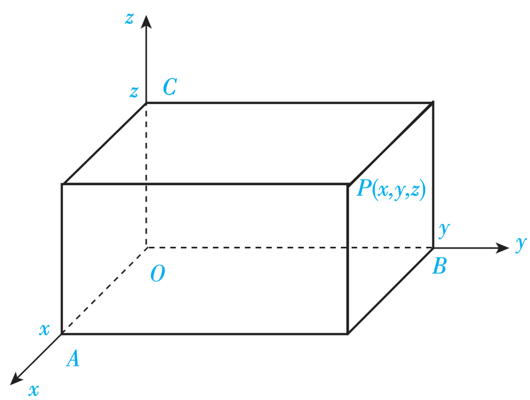

图 7-1-3

显然,原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$;x 轴,y 轴和 z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$,$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$;坐标平面 xOy,yOz 和 zOx 上点的坐标分别为 $(x,y,0)$,$(0,y,z)$ 和 $(x,0,z)$;点 $P(x,y,z)$ 关于 xy 面的对称点的坐标是 $(x,y,-z)$,关于 yz 面的对称点的坐标是 $(-x,y,z)$,关于 zx 面的对称点的坐标是 $(x,-y,z)$;关于 x 轴,y 轴和 z 轴的对称点分别是 $(x,-y,-z)$,$(-x,y,-z)$ 和 $(-x,-y,z)$,关于原点 O 的对称点的坐标是 $(-x,-y,-z)$.

一般地,各卦限内点坐标的符号如表 7-1-1 所示.

表 7-1-1 各卦限内点坐标的符号

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
坐标符号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

7.1.3 空间中两点间的距离

空间中两点间距离公式是空间解析几何的重要公式.

通过平面几何的学习已经知道，平面上任意两点 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$ 之间的距离公式为 $|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，则由勾股定理很容易推得空间中任意两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间距离公式为

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

如图 7-1-4 所示，过点 P_1 和点 P_2 各作三个平面分别垂直于三个坐标轴，这六个平面构成一个长方体. 而 P_1A，AD 和 DP_2 的长显然分别是 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$ 和 $|z_2-z_1|$，线段 P_1P_2 是这个长方体的一条对角线. 根据勾股定理有

$$|P_1P_2|=\sqrt{|P_1D|^2+|DP_2|^2}=\sqrt{|P_1A|^2+|AD|^2+|DP_2|^2}$$

即

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

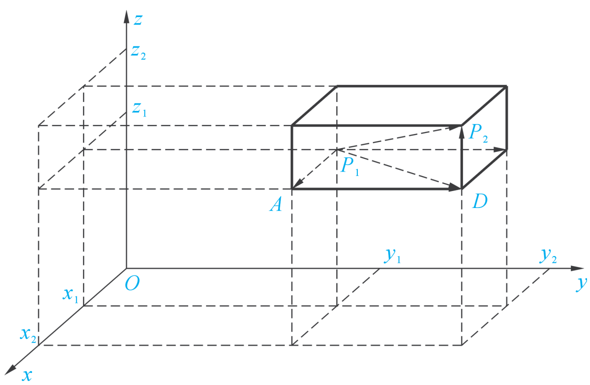

图 7-1-4

例 1 求点 $A(1,-1,0)$ 与点 $B(3,1,-2)$ 之间的距离.

解 由两点间距离公式得

$$|AB|=\sqrt{(3-1)^2+(1-(-1))^2+(-2-0)^2}=2\sqrt{3}$$

微课

向量的概念

7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的定义

在日常生活与生产实践中经常会遇到两种量，一种如温度、体积、质量等，这种只有大小而没有方向的量称为数量（标量）；另一种如速度、位移、加速度等，既有大小，还有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量（矢量）.

在数学上,通常用一条有向线段(有方向的线段)来表示向量,始点是 A 终点是 B 的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 为方便起见,常用一个黑体字母来表示向量,手写时可用带箭头的小写字母来表示. 如向量 $\overrightarrow{AB}$ 也可记作 $\boldsymbol{a}$ 或 $\vec{a}$ (见图 7-2-1).

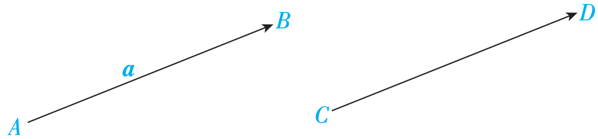

图　7-2-1

有向线段的长度表示向量的大小,称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度或模,记作 $|\overrightarrow{AB}|$;从点 A 到点 B 的方向表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 的方向.

数学上研究的向量与起点和终点无关,称为自由向量. 若两个向量的模相等且方向相同,则称这两个向量相等,记作 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$,如图 7-2-1 所示. 由此可见,一个向量在空间平行移动后,仍为相同的向量.

特殊地,有:

(1)模为零的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向是任意的.

(2)模为 1 的向量称为单位向量. 常用 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量. 显然,若对调向量 $\overrightarrow{AB}$ 起点和终点的位置,则得到与 $\overrightarrow{AB}$ 模相等而方向相反的另一向量 $\overrightarrow{BA}$,向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量,记作 $-\overrightarrow{AB}$.

7.2.2　向量的线性运算

1. 加法

在中学物理中我们学到,力与位移都是向量. 力的合成与位移的加法都是向量的加法,所使用的方法是平行四边形法则和三角形法则.

如图 7-2-2 所示,两个力 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 的合力是以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{AC}$. 又如图 7-2-3 所示,一质点从 A 点出发到达 B 点的位移为 $\overrightarrow{AB}$,再从 B 点到 C 点作位移 $\overrightarrow{BC}$,那么其两次位移 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 的结果,相当于作位移 $\overrightarrow{AC}$.

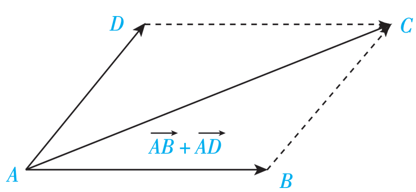

图　7-2-2

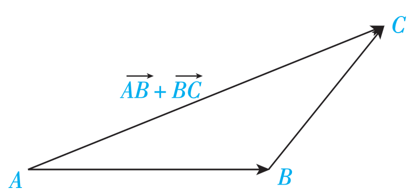

图　7-2-3

求合位移用的“三角形法则”与求合力用的“平行四边形法则”虽然形式不同,但实质却是一致的.

从上面位移与力的合成法中，抽象出如下的向量加法的定义.

定义 1 设给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则称以 A 为起点，C 为终点的向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 求向量的和的方法称为向量的加法.

若记向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，则有等式

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

向量加法与实数加法一样符合下列运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

向量加法的三角形法则还可以推广到有限多个向量的情形. 例如求 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，可以根据三角形法则推出下面的多边形法则，如图 7-2-4 所示，若以前一个向量的终点为后一个向量的起点，依次作 $\overrightarrow{A_0A_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_3$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，则以第一个向量的起点 A_0 为起点，最后一个向量的终点 A_n 为终点的向量 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 为 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，若记向量 $\overrightarrow{A_0A_n}=\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n=\boldsymbol{a}$$

2. 减法

定义 2 设给定两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，若存在向量 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 即若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$$

我们知道，

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),\ \boldsymbol{a}-(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

因此，两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 的和.

向量减法的三角形法则如图 7-2-5 所示：从点 O 作两向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则以向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为起点，向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 为终点的向量 $\overrightarrow{BA}$ 就是向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差.

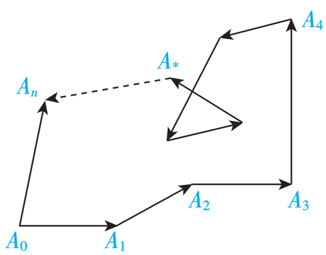

图 7-2-4

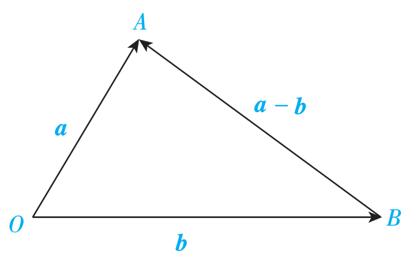

图 7-2-5

3. 数乘

定义 3 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积仍为一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{a}|$$

它的方向当 $\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反(见图 7-2-6).

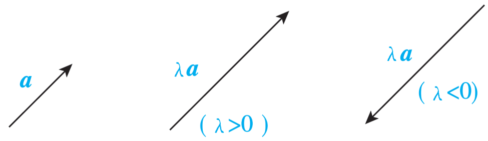

图 7-2-6

特别地,当 $\lambda = 0$ 或 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量;

当 $\lambda = 1$ 时, $1 \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$;当 $\lambda = -1$ 时, $(-1) \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$$

并由此得到

$$\boldsymbol{e}_a = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$$

即非零向量除以它的模便得到一个与它同向的单位向量.

向量的数乘运算满足下列运算律($\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个向量, λ 与 μ 为两个任意常数):

(1)结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

(2)分配律: $(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加、减法及向量的数乘运算统称为向量的线性运算.

例 1 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量为 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{BD} = \boldsymbol{b}$,试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{DA}$.

解 设 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ 的交点为 O (见图 7-2-7).

由于平行四边形对角线互相平分,故

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

根据三角形法则,有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$$

$$\overrightarrow{DA} = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

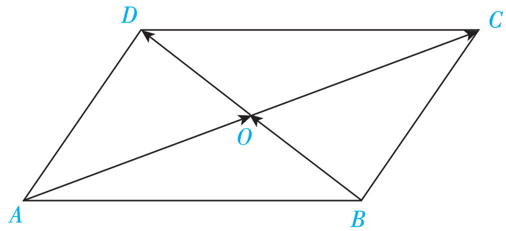

图 7-2-7

定理 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

证 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性：

设 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$. 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$ ，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值，当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值，即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向，且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ ，又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$ ，两式相减，便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

即 $|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ ，故 $|\lambda-\mu|=0$ ，即 $\lambda=\mu$. 定理得证.

此定理是建立数轴的理论依据. 确定一条数轴，需要一个点、方向和单位长度. 因为单位向量既确定了方向，又给定了单位长度，所以，只需要再有一个确定的点就可以确定一条数轴.

7.2.3 向量线性运算的坐标表示

1. 向量的坐标表示

建立空间直角坐标系 $Oxyz$. $\boldsymbol{a}$ 为空间一向量，平移 $\boldsymbol{a}$ 使其起点与原点 O 重合，若其终点 A 的坐标是 (x,y,z) ，则向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 唯一对应于有序数组 (x,y,z) ；反之，对于给定的任意一个有序数组 (x,y,z) ，在空间就唯一确定一点 $A(x,y,z)$ ，从而确定一个向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$. 即向量 $\boldsymbol{a}$ 与有序数组 (x,y,z) 之间建立了一一对应关系. 称这个数组 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$. 其中 x ， y 和 z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的三个坐标或分量.

沿 x 轴，y 轴和 z 轴正向的三个单位向量称为空间直角坐标系的基本单位向量，分别记作 $\boldsymbol{i}$ ， $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$. 如图 7-2-8 所示，过向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 作垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴的三个平面，与坐标轴分别交于点 $A_1(x,0,0)$ ， $A_2(0,y,0)$ 和 $A_3(0,0,z)$ ，向量 $\overrightarrow{OA_1}$ ， $\overrightarrow{OA_2}$ 和 $\overrightarrow{OA_3}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的分向量. 由多边形法则可知

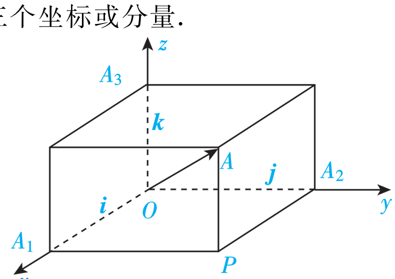

图 7-2-8

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1P}+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$$

由于 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别是沿 x 轴，y 轴和 z 轴正向的三个基本单位向量，因此由数乘向量定义可得

$$\overrightarrow{OA_1}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{OA_2}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OA_3}=z\boldsymbol{k}$$

代入上式得

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分解式.

显然，基本单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的坐标分别是 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$.

零向量的坐标是 $(0,0,0)$，还容易看出，若两个向量相等，则它们的坐标对应相等，反之亦然.

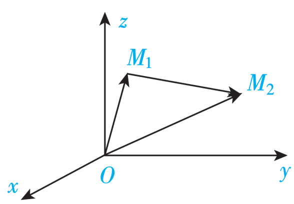

图 7-2-9

若已知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则如图 7-2-9 所示，$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)\\&=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)\end{aligned}$$

2. 向量线性运算的坐标表示

利用向量的坐标表达式及向量线性运算的规律，易得两向量加减法及数乘的运算方法.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

例 2 设 $M_1(1,3,4)$，$M_2(2,1,3)$，求 $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{M_1M_2}$.

解 $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=(1,3,4)+(2,1,3)=(3,4,7)$

$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=(1,3,4)-(2,1,3)=(-1,2,1)$

$\overrightarrow{M_1M_2}=(2,1,3)-(1,3,4)=(1,-2,-1)$

例 3 设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，在线段 AB 上找一点 M，分 AB 为线段 AM，MB，使它们的值的比为数 $\lambda(\lambda\neq-1)$，即 $\dfrac{AM}{MB}=\lambda$，求 M 点的坐标.

解 如图 7-2-10 所示. 因为

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$$

所以

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$$

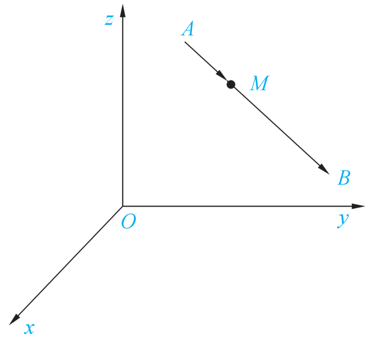

图 7-2-10

将 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A，点 B 的坐标)代入，即得

$$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$$

这就是点 M 的坐标.

例 3 中的点 M 叫作有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的 λ 分点. 特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段 AB 的中点为

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

注意：点 M 和向量 $\overrightarrow{OM}$ 有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既可以表示点的坐标，也可以表示向量的坐标，但点和向量的坐标在几何中是两个不同的概念. (x,y,z) 表示向量的坐标时，可以对其进行运算；而 (x,y,z) 表示点的坐标时，不能对其进行运算.

3. 向量的模、方向角与方向余弦

由两点间距离公式，得 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

定义 4 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量，在空间任意取定一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB\,(0\leqslant\angle AOB\leqslant\pi)$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

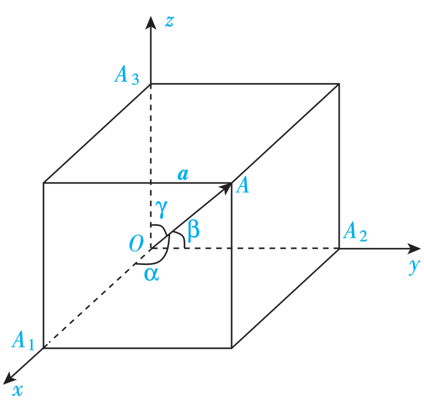

图 7-2-11

当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 0；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 π；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角在 0 与 π 之间.

为了表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，把向量 $\boldsymbol{a}$ 与三个基本单位向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的夹角 α，β，γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角(见图 7-2-11).

方向角的余弦 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

设 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 是非零向量，由图 7-2-11 可以看出

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,\ y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,\ z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma$$

从而有

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

且

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

即任一非零向量的方向余弦的二次方和等于1.

再由 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 可得

$$\boldsymbol{e}_a=\left(\frac{x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

例 4 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$,$M_2(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦、方向角以及与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{2},\ \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\ \beta=\frac{\pi}{3},\ \gamma=\frac{3\pi}{4}$$

设 $\boldsymbol{e}_a$ 为与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 同向的单位向量,由 $\boldsymbol{e}_a=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 得

$$\boldsymbol{e}_a=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4. 向量在轴上的投影

定义 5 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影,记为 $\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{e}_b$,其中 φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

当 φ 为锐角时,投影为正值;当 φ 为钝角时,投影为负值.

显然,起点为 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在各坐标轴上的投影分别为 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1.特殊地,向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 在 x 轴、y 轴、z 轴的投影分别为 x,y,z.

用 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 和 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在 u 轴上的投影,向量的投影具有与坐标相同的性质:

性质 1 $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$（即 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_u=(\boldsymbol{a})_u+(\boldsymbol{b})_u$）；

性质 2 $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$（即 $(\lambda\boldsymbol{a})_u=\lambda(\boldsymbol{a})_u$）.

例 5 设向量 $\boldsymbol{r}$ 的模是 4，它与 u 轴的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，求 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影.

解 已知 $|\boldsymbol{r}|=4$，则

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}=|\boldsymbol{r}|\cos\theta=4\times\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}=2$$

7.3 向量的数量积与向量积

7.3.1 向量的数量积

先来看一个实际的例子，如图 7-3-1 所示，设物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 的作用下沿直线从 M_1 运动到 M_2，则其位移为 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\boldsymbol{F}$ 所做的功为

$$W=|\boldsymbol{F}|\,|\overrightarrow{M_1M_2}|\cos\theta$$

其中，θ 为 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的夹角.

功是一个数，它是由力与位移这两个向量的模及其夹角的余弦相乘得到的.这种运算称为向量的数量积.

定义 1 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模与它们夹角余弦的乘积叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积（也称内积或点积），记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，如图 7-3-2 所示. 即：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

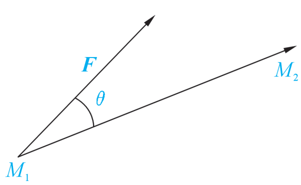

图 7-3-1

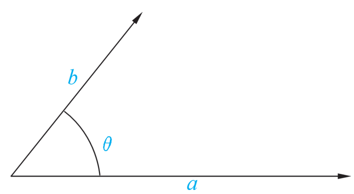

图 7-3-2

因此，上述例子中的功可表示为

$$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$$

由定义知数量积具有下列性质：

(1) 当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中有一个为零向量时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$（该性质在求向量的模时很有用）.

这是因为夹角 $\theta=0$，所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$$

(3) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$($\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量).

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,由于 $|\boldsymbol{a}|\neq0$,$|\boldsymbol{b}|\neq0$,所以 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,那么 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$,$\cos\theta=0$,于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

此外,向量的数量积还有下列重要运算规律:

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律).

证 根据定义有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}),\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$$

而

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|,\text{且}\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$$

所以

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$(结合律).

证 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,上式显然成立;当 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,按投影性质 2,可得

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|\lambda\,\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$$

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律).

证 当 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 时,上式显然成立;当 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 时,有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

由投影性质 1,可知

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则不难推出向量数量积的坐标表达式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 可得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

进而得到 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

例 1　已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,1)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 θ.

解
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times0+0\times1+1\times1=1$$
$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$
故 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

例 2　已知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 都是单位向量，且满足 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}$.

解　（方法 1）　由所给条件及向量加、减法的三角形法则知这三个向量构成首尾相接的等边三角形.

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$，且 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\gamma}|=1$，则这三个向量两两夹角均为 $\frac{2}{3}\pi$，故
$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}=3\times1\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{3}{2}$$

（方法 2）　利用数量积运算性质(2).

由 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{0}$，可得 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})\cdot(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=0$，即
$$|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}|^2+2(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha})=0$$
故
$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}=-\frac{3}{2}$$

例 3　设 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-9$，求向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标.

解　设 $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}$，则
$$-9=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=9\lambda$$
$$\lambda=-1$$
故
$$\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{a}=(-1,-2,2)$$

例 4　在 xOy 平面上求与已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1,3)$ 垂直的单位向量.

解　设所求单位向量为 (x,y,z)，因为它在 xOy 平面上，所以 $z=0$. 又因为它是与向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直的单位向量，所以有
$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\-2x+y=0\end{cases}$$
解此方程组得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y_1 = \dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{5} \\ y_2 = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

于是,所求向量为 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5},0\right)$ 或 $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5},-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},0\right)$.

7.3.2 向量的向量积

在物理学中我们知道,力矩是一个既有大小又有方向的量,即向量.它的大小为力的模与力臂的模之积再乘以力与力臂夹角的正弦值,它的方向垂直于力与力臂所在的平面并且指向外侧.

由此,在数学中,我们根据这种运算抽象出两向量的向量积的概念.

定义 2 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(也称外积或叉积)是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

它的大小为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\ (\theta \text{ 为 } \boldsymbol{a} \text{ 与 } \boldsymbol{b} \text{ 的夹角})$$

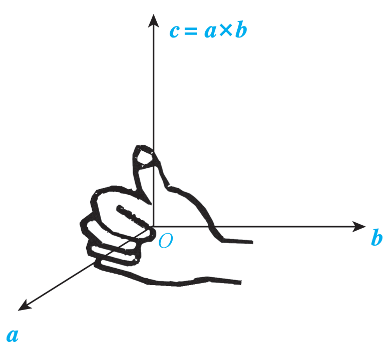

图 7-3-3

它的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,且指向由右手规则确定(见图 7-3-3),即当右手的四个手指从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的角转向 $\boldsymbol{b}$ 握拳时,大拇指的指向就是 $\boldsymbol{c}$ 的指向.

注:向量数量积的结果是一个数字,而向量积的结果是一个向量.

向量积具有如下的性质:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

这是因为夹角 $\theta=0$,所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}|^2\sin 0=0$.

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (不满足交换律).

这是因为按右手规则从 $\boldsymbol{b}$ 转向 $\boldsymbol{a}$ 定出的方向恰好与按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 写出的方向相反.

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ (结合律).

(4) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,

$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$ (分配律).

(5) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

这是因为如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,由于 $|\boldsymbol{a}|\neq\boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{b}|\neq\boldsymbol{0}$,那么必有 $\sin\theta=0$,于是 $\theta=0$ 或 π,即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;反之,如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,那么 $\theta=0$ 或 π,于是 $\sin\theta=0$,从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$,即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

由于可以认为零向量与任何向量都平行，所以，上述结论可以叙述为：向量 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

可以推出，向量的向量积的坐标表示为

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+\\&\quad a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$，所以

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

为了便于记忆，可写成行列式的形式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

例 5 设 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-3,1,1)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times(-3)+0\times1+(-2)\times1=-5$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-2\\-3&1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(2,5,1)$$

例 6 已知 $M_1(1,-1,2)$，$M_2(3,3,1)$，$M_3(3,1,3)$，求与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 都垂直，因此本题是先求两向量的向量积，然后再单位化.

由 $\overrightarrow{M_1M_2}=(2,4,-1)$，$\overrightarrow{M_2M_3}=(0,-2,2)$，可得

$$\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&4&-1\\0&-2&2\end{vmatrix}=(6,-4,-4)$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_2M_3}|=\sqrt{36+16+16}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

因此与 $\overrightarrow{M_1M_2}$，$\overrightarrow{M_2M_3}$ 同时垂直的单位向量为 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}(3,-2,-2)$.

7.3.3 向量的混合积

定义 3 设已知三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$．先作两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，把所得到的向量与第三个向量 $\boldsymbol{c}$ 再作数量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，这样得到的数量叫作三向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的混合积，记作 $[\boldsymbol{abc}]$．

下面根据混合积的定义推导混合积的坐标表达式．

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

再按两向量的数量积的坐标表达式，便得

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{abc}]&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\ &=c_x\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-c_y\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+c_z\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\\ &=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}\end{aligned}$$

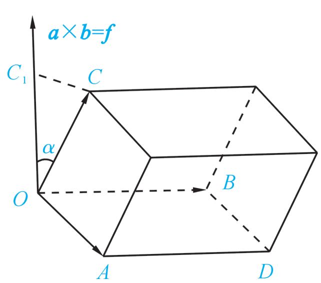

图 7-3-4

向量混合积的几何意义，可以这样去理解：向量的混合积是这样一个数，它的绝对值表示以向量为棱的平行六面体的体积，如图 7-3-4 所示．

组成混合积 $[\boldsymbol{abc}]$ 的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 组成右手坐标系．如果向量 $\boldsymbol{c}$ 的方向是按右手法则从向量 $\boldsymbol{a}$ 转向向量 $\boldsymbol{b}$ 来确定的，那么该混合积是正值；反之则为负值．

事实上，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$．按向量积的定义，向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{f}$ 是一个向量，它的模在数值上等于以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为边所作平行四边形 $OADB$ 的面积，它的方向垂直于这平行四边形的平面，且当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，向量 $\boldsymbol{f}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的同侧，如图 7-3-4 所示．当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 组成左手系时，向量 $\boldsymbol{f}$ 与向量 $\boldsymbol{c}$ 朝着这平面的异侧．因此，如设 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的夹角为 α，那么当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，α 为锐角；当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 组成左手系时，α 为钝角．由于

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\cos\alpha$$

所以当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成右手系时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为正；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 组成左手系时，$[\boldsymbol{abc}]$ 为负．

因为以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的底的面积在数值上等于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，它的高等于向

量 $\boldsymbol{c}$ 在向量 $\boldsymbol{f}$ 上的投影的绝对值,所以平行六面体的体积为

$$V=Sh=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}||\cos\alpha|=|[\boldsymbol{abc}]|$$

可见,若混合积$[\boldsymbol{abc}]\neq0$,则能以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱构成平行六面体,从而向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面;反之,若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面,则必能以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱构成平行六面体,从而$[\boldsymbol{abc}]\neq0$. 于是,得到判定三向量是否共面的一个定理.

定理 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是它们的混合积$[\boldsymbol{abc}]=0$,即

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$$

例 7 已知 $A(1,2,0)$, $B(2,3,1)$, $C(4,2,2)$, $D(x,y,z)$ 四点共面,求点 D 的坐标 x, y, z 所满足的关系式.

解 A,B,C,D 四点共面相当于 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 三向量共面,这里 $\overrightarrow{AD}=(x-1,y-2,z)$, $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{AC}=(3,0,2)$. 按三向量共面的充分必要条件,可得

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

即

$$2x+y-3z-4=0$$

即点 D 的坐标 x,y,z 应满足关系式 $2x+y-3z-4=0$.

7.4 曲面方程与空间曲线方程的概念

在日常生活中,常常会遇到各种曲面. 如眼镜片的表面、汽水瓶的表面、球面等. 它们不是平面,但类似于平面解析几何中将曲线看作动点的轨迹,在空间解析几何中,曲面也可以看作空间中动点的轨迹.

定义 1 空间直角坐标系中,曲面 S 上任意一点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$,而不在 S 上的点坐标都不满足此方程,则方程

$$F(x,y,z)=0$$

称为曲面 S 的方程;反之,S 称为方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形,如图 7-4-1 所示.

例 1 求与定点 $M_0(1,2,3)$ 距离等于 2 的点的轨迹方程.

解 设动点 $M(x,y,z)$,则 $|MM_0|=2$,即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=2$$

则所求方程为

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$$

空间曲线可以看作两个曲面 S_1 和 S_2 的交线,设

$$F(x,y,z)=0 \text{ 和 } G(x,y,z)=0$$

分别是这两个曲面的方程,它们的交线为 C,如图 7-4-2 所示. 因为曲线 C 上的任何点的坐标应同时满足这两个曲面的方程,所以应满足方程组:

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

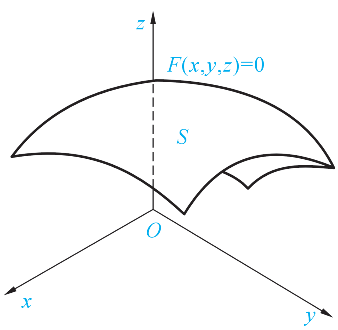

图 7-4-1

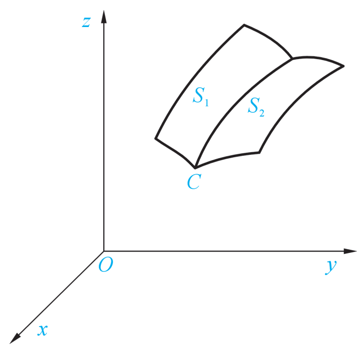

图 7-4-2

反过来,如果点 M 不在曲线 C 上,那么它不可能同时在两个曲面上,所以它的坐标不满足该方程组. 因此,曲线 C 可以用该方程组来表示. 该方程组就叫作空间曲线 C 的方程,而曲线 C 就叫作该方程组的图形.

在接下来的章节中,将以向量作为工具,在空间直角坐标系中讨论最简单的曲面和曲线——平面和直线.

7.5 平面及其方程

平面是空间中最简单、最常用的一种曲面. 下面以向量为工具,在空间直角坐标系中讨论其方程,进而研究其一些基本性质.

7.5.1 平面的点法式方程

如果一非零向量垂直于一个平面,则该向量称为平面的法向量. 该平面内的任一向量均垂直于法向量.

已知平面 Π 通过定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且其法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$（见图 7-5-1）.

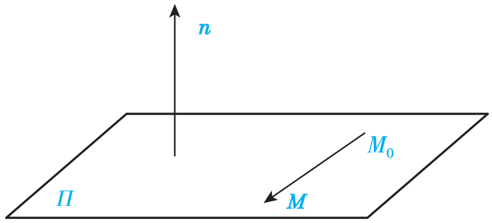

图　7-5-1

设 $M(x,y,z)$ 为平面 Π 上的一个动点，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 必垂直于法向量 $\boldsymbol{n}$（见图 7-5-1），即有 $\overrightarrow{M_0M}\cdot\boldsymbol{n}=0$，而 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，所以有

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

上式即为平面 Π 的点法式方程.

例 1　已知平面与三条坐标轴的交点分别为 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，求平面的方程（其中 $abc\neq 0$）.

解　先求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$. 因为 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AC}$，所以可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，而 $\overrightarrow{AB}=(-a,b,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-a,0,c)$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}&=\left(\begin{vmatrix} b & 0\\ 0 & c\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & -a\\ c & -a\end{vmatrix},\begin{vmatrix} -a & b\\ -a & 0\end{vmatrix}\right)\\&=(bc,ca,ab)\end{aligned}$$

又因为平面过点 $A(a,0,0)$，由点法式方程得 $bc(x-a)+cay+abz=0$，即

$$bcx+cay+abz=abc$$

因为 $abc\neq 0$，两边除以 abc 得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

上式也称为平面的截距式方程，而 a,b,c 依次称为平面在 x,y,z 轴上的截距.

例 2　已知平面过点 $A(0,2,0)$，$B(0,0,1)$，且与 x 轴平行，求平面的方程.

解　先求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，依题意 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{i}$，所以可取 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{i}$，而 $\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}&=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{i}=(0,-2,1)\times(1,0,0)\\&=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix} 0 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)=(0,1,2)\end{aligned}$$

又因为平面过 $A(0,2,0)$，由点法式方程得 $(y-2)+2z=0$，即 $y+2z-2=0$.

7.5.2 平面的一般式方程

平面的点法式方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，整理可得

$$Ax+By+Cz+D=0\text{，其中 }D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$$

上式称为平面的一般式方程.此方程是关于 x，y，z 的三元一次方程，反之，任意一个三元一次方程组都表示一个平面.向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 即为平面的法向量.

平面的一般式方程有下面几种特殊情况：

(1)当 $D=0$ 时，方程 $Ax+By+Cz=0$ 表示一个过原点的平面；

(2)当 $A=0$ 时，方程 $By+Cz+D=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,B,C)$ 与 x 轴垂直，方程表示的平面与 x 轴平行(或包含 x 轴)；

同理，当 $B=0$ 或 $C=0$ 时，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和方程 $Ax+By+D=0$ 分别表示平行于(或包含) y 轴与 z 轴的平面；

(3)当 $A=B=0$ 时，方程 $Cz+D=0$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,C)$ 既垂直于 x 轴又垂直于 y 轴，即法向量平行于 z 轴，方程表示一个平行于(或重合于) xOy 面的平面；

同理，$Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于(或重合于) yOz 面与 zOx 面的平面.

例 3 已知平面过点 $A(0,2,0)$，$B(0,0,1)$，且与 x 轴平行，求平面的一般式方程.

解 因为平面平行于 x 轴，所以可设平面方程为

$$By+Cz+D=0$$

分别将点 $A(0,2,0)$，$B(0,0,1)$ 代入上面方程，得

$$\begin{cases}2B+D=0\\C+D=0\end{cases}$$

解得 $B=-\dfrac{D}{2}$，$C=-D$，取 $D=-2$，得 $B=1$，$C=2$，于是平面的方程为

$$y+2z-2=0$$

7.5.3 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角(通常取锐角或直角)称为两平面的夹角.

设两平面 Π_1 和 Π_2 的方程为

Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

其法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，两平面 Π_1 与 Π_2 的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

上式称为两平面夹角的余弦公式.

由此可以得出两平面关系的一些结论：

(1)两平面垂直：$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$（法向量垂直）；

(2)两平面平行或重合：$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$（法向量平行或重合）.

例 4 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标平面夹角的余弦.

解 坐标平面也是一种平面，两平面夹角又为两平面法向量所夹的锐角或直角，因此只需写出每个平面的法向量，由两平面夹角的余弦公式即可求出.

平面 $2x-2y+z+5=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$. xOy 坐标平面、yOz 坐标平面、xOz 坐标平面的法向量分别为 $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$.

设已知平面与上述三个坐标平面的夹角分别为 α,β,γ，则

$$\cos\alpha=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|}=\frac{1}{3}$$

同理可得 $\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$.

7.5.4 点到平面的距离

平面解析几何中，我们知道直线外一点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离.

在平面中任取一点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，并作一法线向量 $\boldsymbol{n}$，由图 7-5-2，并考虑到 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ 也可能是钝角，得所求的距离

$$d=|\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

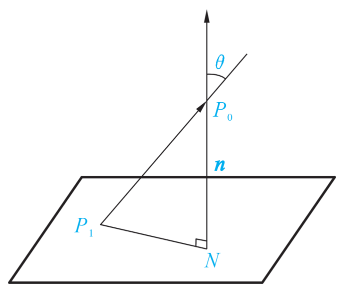

图 7-5-2

而

$$\boldsymbol{n}=(A,B,C)，\overrightarrow{P_1P_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$$

得

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}&=\frac{A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\&=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

因为 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，所以

$$\frac{\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

由此得点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 5 求点 $(2,-1,3)$ 到平面 $3x+6y-2z-15=0$ 的距离.

解

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\times 2+6\times(-1)-2\times 3-15|}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{21}{7}=3$$

微课

空间直线方程

7.6 空间直线及其方程

过空间中的一点可以唯一地作出一条直线与已知直线平行,下面就由此来建立空间直线的方程.

7.6.1 空间直线的对称式方程

如果一个非零向量平行于一条直线,称该向量为这条直线的方向向量.因此,直线上的任意向量都平行于该直线的方向向量.

已知过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的直线 L 和它的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$,设直线 L 上任一点为 $M(x,y,z)$,那么 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\boldsymbol{s}$ 平行,则

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

上式称为空间直线的对称式方程(或点向式方程).

因此,要求一条空间直线的方程,只需要找到直线上的一点和它的一个方向向量即可.

例 1 求过点 $A(-3,2,2)$ 和 $B(3,1,3)$ 的直线.

解 显然直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取为 $\overrightarrow{AB}$,于是 $\boldsymbol{s}=\overrightarrow{AB}=(6,-1,1)$,取定点为 $A(-3,2,2)$,所以直线的点向式方程为

$$\frac{x+3}{6}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{1}$$

7.6.2 空间直线的参数式方程

对于空间直线的对称式方程 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,若令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则整理得

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

上式称为空间直线的参数式方程.

例 2 求直线 $L: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{3}$ 与平面 $\Pi: x-y+z-7=0$ 的交点.

解 令 $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-2}{3} = t$，将直线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1-2t \\ z = 2+3t \end{cases}$$

代入平面方程 $x-y+z-7=0$ 得

$$t-(1-2t)+(2+3t)-7=0$$

解得 $t=1$，所以直线与平面的交点为 $(1,-1,5)$.

7.6.3 空间直线的一般方程

任何一条空间直线都可以看作是两个平面的交线，则由这两个平面的方程组成的方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

即为空间直线的一般方程.

例 3 求过点 $(-3,2,5)$ 且与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，根据题意知，交线的方向向量与两个平面的法向量都垂直，所以

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

所以直线的方程为

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-5}{-1}$$

7.6.4 两直线的夹角

定义 1 两直线方向向量的夹角(通常指锐角)叫作两直线的夹角.

设两直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，两直线的夹角为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

由此可得直线 L_1 与 L_2 平行与垂直的条件：

$$L_1//L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1//\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\perp\boldsymbol{s}_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

例 4 已知两直线方程

$$L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{m}=\frac{z+1}{4}，L_2:\frac{x+3}{n}=\frac{y}{3}=\frac{z-5}{2}$$

且 $L_1//L_2$，求常数 m，n.

解 设两直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1$ 和 $\boldsymbol{s}_2$，根据题意可得

$$\boldsymbol{s}_1=(2,m,4)，\boldsymbol{s}_2=(n,3,2)$$

且 $\boldsymbol{s}_1//\boldsymbol{s}_2$，即

$$\frac{2}{n}=\frac{m}{3}=\frac{4}{2}$$

解得 $m=6$，$n=1$.

7.6.5 直线与平面的夹角

定义 2 当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为直线与平面的夹角. 当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

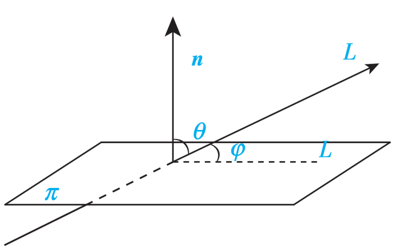

图 7-6-1

如图 7-6-1 所示，设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 θ，直线与平面的夹角为 φ，则 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$，所以 $\sin\varphi=|\cos\theta|$，则

$$\sin\varphi=|\cos\theta|=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

因为直线与平面垂直相当于直线的方向向量与平面的法向量平行，直线与平面平行或直线在平面上相当于直线的方向向量与平面的法向量垂直，所以

线面垂直：$\boldsymbol{s}//\boldsymbol{n}\Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

线面平行：$\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{n}\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$

例 5 确定直线 $L:\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\end{cases}$ 与平面 $\pi:x+2y-z=1$ 的位置关系.

解 由直线 $L:\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\end{cases}$ 得

$$L:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-3}$$

故 L 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,-2,-3)$.

平面 $\pi:x+2y-z=1$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,2,-1)$，由

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=1\times1+(-2)\times2+(-3)\times(-1)=0$$

得 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以直线 L 与平面 π 平行或直线在平面上. 而

$$\begin{cases}2x+y-1=0\\3x+z-2=0\\x+2y-z=1\end{cases}$$

无解，故直线 L 不在平面 π 上，即直线 L 与平面 π 平行.

微课

曲面及其方程

7.7 曲面及其方程

7.7.1 球面

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是空间中的一定点，试确定到该点距离等于定长 R 的点的轨迹方程.

若设动点 M 的坐标为 (x,y,z)，由两点间的距离公式，得

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

称此方程为球面方程，该方程表示的是以点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心，以 R 为半径的一个球面，如图 7-7-1 所示. 特别地，当 M_0 在原点时，球面方程可以简化为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

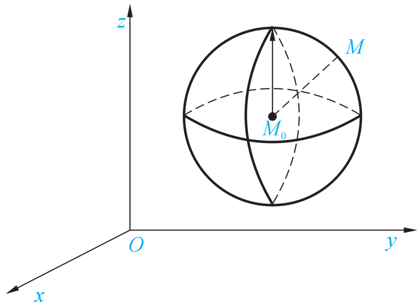

图 7-7-1

例 1 建立以点 $(1,3,-2)$ 为球心，且通过坐标原点的球面方程.

解 设以点 $(1,3,-2)$ 为球心，R 为半径的球面方程为

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=R^2$$

球面过原点，故

$$R^2=(0-1)^2+(0-3)^2+(0+2)^2=14$$

从而所求球面方程为 $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=14$.

7.7.2 旋转曲面

定义 用一条平面曲线绕其所在平面内的一条定直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面，这条定直线称为旋转曲面的轴，曲线称为旋转曲面的母线.

下面讨论旋转曲面的方程.

设 yOz 面上的曲线 C：$f(y,z)=0$ 绕 y 轴旋转一周就产生一个旋转曲面(见图 7-7-2).

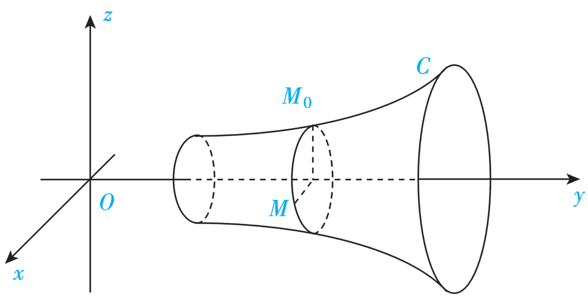

图 7-7-2

由于旋转曲面上任一点 $M(x,y,z)$ 是由曲线 C 上的点 $M_0(0,y_0,z_0)$ 绕 y 轴旋转而得的，所以 $y_0=y$，又因为点 M 和点 M_0 到 y 轴的距离相等，所以

$$|z_0|=\sqrt{z^2+x^2}$$

或

$$z_0=\pm\sqrt{z^2+x^2}$$

又因为点 $M_0(0,y_0,z_0)$ 在曲线 C 上,所以有

$$f(y_0,z_0)=0$$

将 $y_0=y$, $z_0=\pm\sqrt{z^2+x^2}$ 代入上式得

$$f(y,\pm\sqrt{z^2+x^2})=0$$

这就是所求的旋转曲面方程.

所以,要得到 C 绕 y 轴旋转所得旋转曲面方程只需将方程 $f(y,z)=0$ 中的 z 替换成 $\pm\sqrt{z^2+x^2}$,即 C 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.

同理,其他平面上的情况也可以用这种方法来讨论.

例 2 求 xOz 平面内的曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转所形成的旋转曲面的方程.

解 绕 x 轴旋转,只需将曲线方程中的 z 替换为 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,即

$$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2+z^2}{3}=1$$

绕 z 轴旋转,只需将曲线方程中的 x 替换为 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,即

$$\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=1$$

7.7.3 常见二次曲面

1. 柱面

设 C 是一条空间曲线,动直线 L 沿定曲线 C 平行移动所形成的曲面称为柱面. 定曲线 C 称为准线,动直线 L 称为柱面的母线(见图 7-7-3).

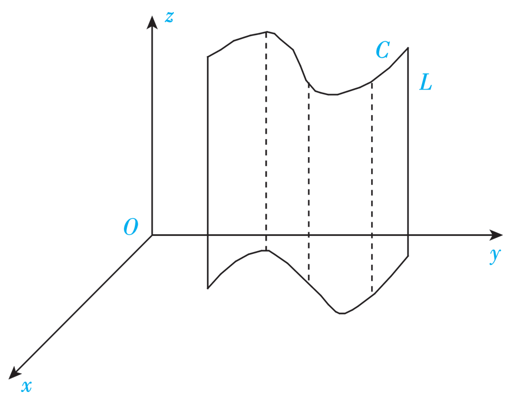

图 7-7-3

一般地,不含变量 z 的方程表示准线在 xOy 面上,母线平行于 z 轴的柱面;不含 x 的方程表示准线在 yOz 平面上,母线平行于 x 轴的柱面;不含 y 的方程表示准线在 zOx 平面上,

母线平行于 y 轴的柱面.

例如,方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ x^2=2py$$

在空间直角坐标中分别表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面(见图 7-7-4).

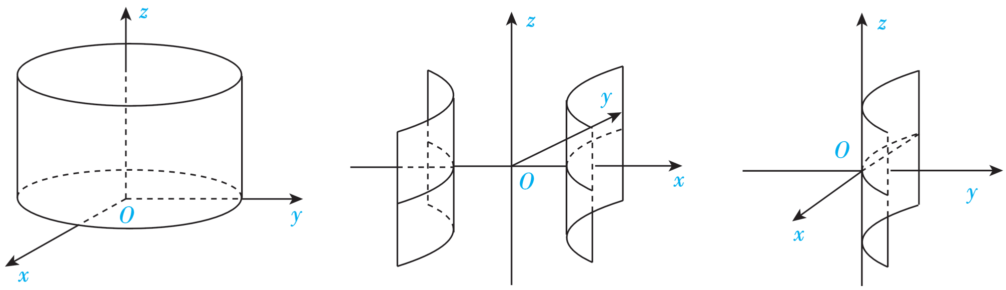

图 7-7-4

2. 椭球面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所确定的曲面称为椭球面. a,b,c 为椭球面的三个半轴,椭球面与 x 轴、y 轴、z 轴的交点分别为 $\pm a$,$\pm b$,$\pm c$ (见图 7-7-5).

显然当 $a=b=c$ 时,方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ 就是一个球面.

3. 单叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所确定的曲面称为单叶双曲面(见图 7-7-6).

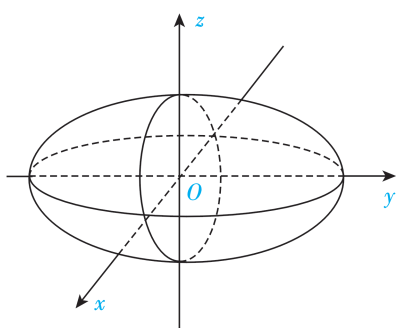

图 7-7-5

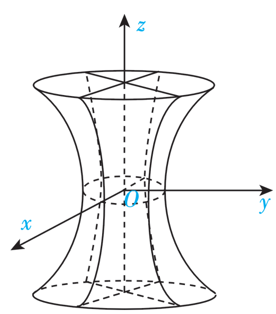

图 7-7-6

此曲面用平面 $z=z_0$ 去截,所得是一个椭圆,用垂直于 xOy 面的平面去截,所得是双曲线.

4. 双叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 所确定的曲面称为双叶双曲面(见图 7-7-7).

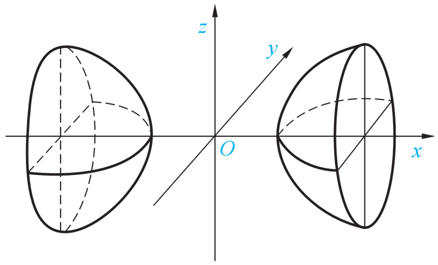

图 7-7-7

此曲面用平面 $x=x_0$ 去截,所得是一个椭圆,用垂直于 yOz 面的平面去截,所得是双曲线.

5. 椭圆抛物面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$ 所确定的曲面称为椭圆抛物面(见图 7-7-8).

此曲面用平面 $z=z_0$ 去截,所得是一个椭圆,用垂直于 xOy 面的平面去截,所得是抛物线.

6. 双曲抛物面

由方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$ 所确定的曲面称为双曲抛物面,又叫马鞍面(见图 7-7-9).

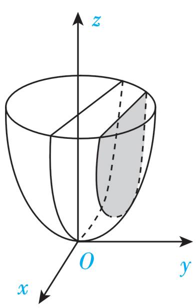

图 7-7-8

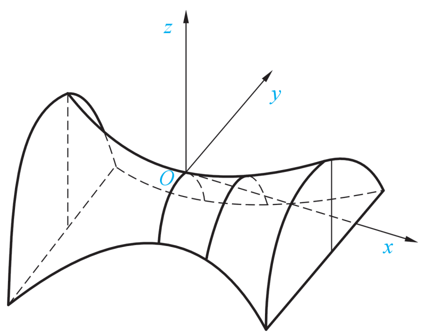

图 7-7-9

此曲面用平面 $x=x_0$ 去截,所得是抛物线,用垂直于 yOz 面的平面去截,所得是双曲线.

7.8 空间曲线及其方程

微课

空间曲线及其方程

7.8.1 空间曲线的一般方程

直线可看作是两个平面的交线,直线的方程可由两个平面方程组成的方程组来表示.

类似地,空间曲线可以看成是两个曲面的交线.设两个空间曲面 S_1,S_2 的方程分别为

$$F_1(x,y,z)=0 \text{ 和 } F_2(x,y,z)=0$$

它们都通过曲线 C，则空间曲线 C 的方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

此式称为空间曲线的一般方程.

例 1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x=2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 表示球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x=2$ 的交线,是一个圆.

例 2 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 表示圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线.

7.8.2 空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 (x,y,z) 表示为参数 t 的函数,就得到了曲线 C 的参数方程:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

当 $t=t_1$ 时,便得到曲线 C 上一个点的坐标 $(x(t_1),y(t_1),z(t_1))$,随着 t 的变动,便可以得到 C 上的全部点.

曲线的参数方程和一般方程之间可以相互转化.

例 3 求曲线 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos t \\ z=1 \end{cases}$ $(t\in[0,2\pi])$ 的一般方程.

解 消去变量 t，得 $x^2+y^2=\sin^2 t+\cos^2 t=1$，即该曲线的一般方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$$

7.8.3 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去变量 z 所得的方程 $f(x,y)=0$. 这就是以 C 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.

此柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面. 投影柱面与 xOy 面的交线称为 C 在 xOy

面的投影曲线，简称投影. 因此投影的方程为

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

同理，可以得到曲线 C 在另外两个坐标面上的投影方程.

例 4 求曲线 Γ：$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2-y^2+z^2=0 \end{cases}$ 在 yOz 面及 zOx 面上的投影曲线方程.

解 由 Γ 的方程消去变量 x 得 Γ 关于 yOz 面的投影柱面方程为

$$3y^2-z^2=16$$

消去变量 y 得 Γ 关于 zOx 面的投影柱面方程为

$$3x^2+2z^2=16$$

所以 Γ 在面 yOz 及 zOx 面上的投影曲线方程分别为 $\begin{cases} 3y^2-z^2=16 \\ x=0 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3x^2+2z^2=16 \\ y=0 \end{cases}$.

例 5 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成，求它在 xOy 面上的投影.

解 半球面与锥面交线为

$$C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$$

消去 z 并将等式两边二次方，整理得投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

即 xOy 平面上的以原点为圆心，1 为半径的圆. 所以，立体在 xOy 平面上的投影为圆所围成的部分：$x^2+y^2\leqslant 1$.

习题七

1. 求点 $M(4,-3,5)$ 到原点及各坐标轴的距离.

2. 已知向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的始点为 $P_1(2,-2,5)$，终点为 $P_2(-1,4,7)$，试求：

(1) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标表示；

(2) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的模；

(3) 向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向余弦；

(4)与向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向一致的单位向量.

3. 某向量终点为 $(-1,2,7)$，它在各坐标轴上的投影分别为 -4，4，7，求其起点坐标.

4. 求与 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$ 共线，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=28$ 的向量 $\boldsymbol{b}$.

5. 判断对错

(1)若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；（　　）

(2)若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$；（　　）

(3) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$；（　　）

(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.（　　）

6. 已知 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$，求 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

7. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{b}=(1,1,0)$，求 $\boldsymbol{c}$，使 $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$ 且 $|\boldsymbol{c}|=6$.

8. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周，求所生成的旋转曲面的方程.

9. 求 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+y^2-x=0\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影.

10. 求 $\begin{cases}2x^2+z^2+4y=4z\\x^2+3z^2-8y=12z\end{cases}$ 在 zOx 面上的投影.

11. 求由曲面 $x^2+y^2=2z$，$z=4$ 围成的立体在 xOy 面上的投影.

12. 自点 $M(2,3,-5)$ 分别向各坐标面作垂线，求过三个垂足的平面方程.

13. 求过直线 $\begin{cases}4x-y+3z-1=0\\x+5y-z+2=0\end{cases}$ 且与平面 $2x-y+5z+2=0$ 垂直的平面方程.

14. 求满足下列条件的平面方程：

(1)过三点 $P_1(0,1,2)$，$P_2(1,2,1)$ 和 $P_3(3,0,4)$；

(2)过 x 轴且与平面 $\sqrt{5}x+2y+z=0$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$.

15. 求过点 $(-1,2,3)$ 垂直于直线 $\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}$ 且平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

16. 写出曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-y-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ 与三坐标面的交线方程.