高等职业教育公共课精品教材

新时代课程思政建设配套教材

高等数学

闫杰生　池光胜　钟艳林　主编

北京出版集团
北京出版社
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/闫杰生,池光胜,钟艳林主编. —北京:北京出版社:北京教育出版社,2022.3

ISBN 978-7-200-17085-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①闫… ②池… ③钟… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 035435 号

高等数学

闫杰生 池光胜 钟艳林 主编

*

北京出版集团
北京出版社 出版
北京教育出版社

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码:100120

网址:www.bph.com.cn

京版北教文化传媒股份有限公司总发行

全国各地书店经销

北京盛通印刷股份有限公司印刷

*

889 mm×1 194 mm 16 开本 19.5 印张 560 千字

2022 年 3 月第 1 版 2022 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-200-17085-6

定价:54.80 元

质量监督电话:(010)58572525 58572393 购书电话:(010)59812309

PREFACE

前言

高职高专教育是高等教育不可或缺的一个重要组成部分.高职高专教育的目标是培养社会需要的一线人才,即技术应用型人才,以适应经济迅速腾飞的中国对人才的需求.

高等数学是高职高专院校一门重要的基础学科.作为一门学科,数学有其固有的特点,即高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性.抽象性是数学最基本、最显著的特点,只有进行高度的抽象和统一,才能深入地揭示事物的本质规律,使之得到更广泛的应用.严密的逻辑性是指在数学理论的归纳和整理中,无论是概念和表述,还是判断和推理,都要运用逻辑的规则,遵循思维的规律.因此,数学也是一种思想方法,学习数学的过程就是进行思维训练的过程.人类社会的进步,与数学这门学科的广泛应用是分不开的.尤其是到了现代,计算机的出现和普及使得数学的应用领域不断拓宽,现代数学正成为科技发展的强大动力.

本书是按照新形势下教材改革的精神,遵循高职高专教育高等数学课程教学基本要求而编写的,在编写的过程中力求体现以下几个特点.

(1)从高职高专教育的实际出发,结合数学教学改革的实际经验,按照“以应用为目的,以必须够用为度”的原则,以“理解基本概念,掌握运算方法及应用”为目标,删去了不必要的逻辑推导,强化了基本概念的教学.

(2)融合课程思政理念,设计了“育人目标”“思政元素”“思政园地”等模块,旨在坚定学生理想信念、厚植学生爱国主义情怀、加强学生品德修养、增长学生知识见识、培养学生奋斗精神、提升学生综合素质.

(3)编写的内容力求简洁易懂,注重对学生的基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养,贯彻理论联系实际和启发式教学原则,深入浅出,便于学生理解和掌握.

(4)从实际问题中抽象出数学知识,再将数学知识应用到各种实际问题中,用大量的实例反映数学的应用,加深学生对数学知识的理解,从而使数学源于实际,又作用于实际.

(5)结合重点和难点,书中提供了数量适中、难度适当的例题,并突出数学思维方法.为了方便教与学,每节配有习题,每章配有复习题,书后附有习题答案.

本书共分为12章,包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分和无穷级数.书后附有初等数学常用公式和几种常用曲线及其方程.

本书可作为高职高专院校公共基础课教材,也可作为广大青年朋友学习高等数学的参考用书.

在本书的编写过程中,我们参阅了大量的有关高等数学的书籍,并引用了其中的一些资料,在此向有关作者深表感谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,敬请各位专家及广大读者提出宝贵意见,以便修订完善.

编　者

目录

CONTENTS

CONTENTS

CONTENTS

第一章 函数

育人目标

◎ 培养科学态度和理性精神，提高思维能力.
◎ 用联系的普遍性来看待函数中两个变量间相互依存的关系.
◎ 揭示函数概念的形成过程，体会其中蕴含的数学思想方法.

本章导读

现实生活中，存在着常量和变量. 变量和变量之间又存在着相互依赖的关系. 而函数就是刻画这种关系的数学模型. 学好函数，我们就可以通过某一事实的信息推测另一事实. 同时，函数是高等数学的主要研究对象，也是高等数学的基本概念.

本章将在中学数学相关函数知识的基础上，进一步研究函数的概念和性质，为微积分的学习打下基础.

第一节 函数的基本概念

一、函数的定义

定义 设 D 是由数组成的集合. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则 f 总有唯一确定的数值和它对应,那么将对应法则 f 称为在 D 上 x 到 y 的一个**函数**,记作 $y=f(x)$,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数的**定义域**.

当 x 取 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 中的一切数时,对应的函数值集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数的**值域**.

函数的基本概念

在函数的定义中,对每一个 $x\in D$,只能有唯一的一个 y 值与它对应,这种定义的函数称为**单值函数**. 若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值,则称函数为**多值函数**. 如 $y=\pm\sqrt{9-x^2}$ 为多值函数. 在本书范围内,我们只讨论单值函数.

思政元素

1859 年,我国清代著名数学家李善兰在翻译《代数学》一书时,把“function”翻译成中文的“函数”. 李善兰给出的定义是“凡式中含天,为天之函数”. 中国古代用“天、地、人、物”4 个字来表示 4 个不同的未知数或变量. 李善兰认为中国古代“函”与“合”字通用,都有着“包含”的意思,因此“函数”是指公式里含有变量,具体来说就是“若公式中含有变量 x,则该式子叫作 x 的函数”. 函数的发展简史就是数学发展历史的一个缩影,每一个在我们今天看来非常简单的数学名词,背后不知道有多少数学家、数学工作者耗费一生投入其中,我们才有了今天的数学成就.

二、函数的表示法

1. 表格法

表格法是将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法,如三角函数表、常用对数表以及经济分析中的各种统计报表等.

2. 图象法

图象法是用图象表示两个变量的函数关系的方法,如图 1-1 所示.

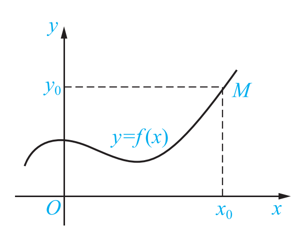


图 1-1

3. 解析法

解析法是用一个等式表示两个变量的函数关系的方法,如 $y=x+3$,$y=\lg(x+2)$等.

下面我们介绍几种常用的用解析法表示的函数.

（1）分段函数.

在定义域的不同范围内用不同的解析式表示的函数称为**分段函数**.

例如　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}\quad 及\ g(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & x>1\end{cases}$$

都是分段函数. 它们的图形分别如图 1-2 和图 1-3 所示.

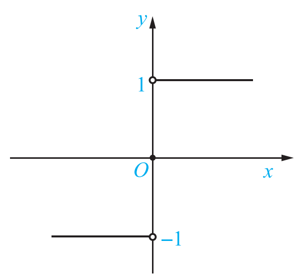


图 1-2

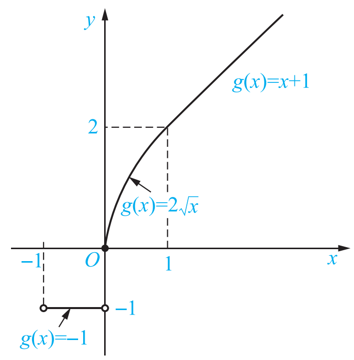


图 1-3

注　意

分段函数仍然是一个函数，而不是几个函数.

（2）隐函数.

如果自变量与因变量的对应关系是用一个方程 $F(x,y)=0$ 确定的，则这种函数称为**隐函数**. 例如 $x^2+y^2=r^2$（r 为常数），$x+y=e^{xy}$ 等，相应地，我们将前面讨论的函数称为**显函数**.

（3）参数方程所确定的函数.

在许多实际问题中，变量 x 与 y 之间的函数关系还可以用含某一参数的方程组来确定，如

$$\begin{cases}x=t,\\ y=1+t,\end{cases}$$

其中 t 为参数. 像这样的函数称为由**参数方程所确定的函数**.

【例 1】

设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0,\\ 3, & 0\leqslant x<1,\\ \ln(2x-1), & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f(-3)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f(1)$，$f(1+h)$.

【解】　$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$；

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=3$；

$f(1)=\ln(2\times 1-1)=\ln 1=0$；

$$f(1+h)=\begin{cases}\sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0,\\ 3, & 0\leqslant 1+h<1,\\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h\geqslant 1,\end{cases}$$

即 $f(1+h)=\begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1,\\ 3, & -1\leqslant h<0,\\ \ln(1+2h), & h\geqslant 0.\end{cases}$

三、函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义确定．当不考虑函数的实际意义，而仅就抽象的解析式来研究函数时，定义域就取使解析式有意义的自变量的全体．要使解析式有意义，我们通常考虑以下几点：

(1)分式的分母不能为零；

(2)偶次根式的被开方数必须为非负数；

(3)对数式中的真数必须大于零；

(4)幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数要考虑各自的定义域；

(5)若函数表达式由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集；

(6)分段函数的定义域是各个定义区间的并集．

【例 2】 求下列函数的定义域．

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；

(3) $y=\lg\dfrac{x+1}{2}$；　　(4) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

【解】 (1) 若使函数有意义，则 $x^2+2x+1\neq 0$，即 $(x+1)^2\neq 0$，即 $x\neq -1$．所以函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$．

(2) 若使函数有意义，则 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x^2-1>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x<-1 \text{ 或 } x>1,\end{cases}$ 解得 $-2\leqslant x<-1$ 或 $1<x\leqslant 2$．所以函数的定义域为 $[-2,-1)\cup(1,2]$．

(3) 若使函数有意义，则 $\dfrac{x+1}{2}>0$，即 $x>-1$．所以函数的定义域为 $(-1,+\infty)$．

(4) $y=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<1,\\ x+1, & x\geqslant 1\end{cases}$ 是分段函数．若使函数有意义，则将分段表达式的定义域合在一起，即可得该分段函数的定义域．所以函数的定义域为 $[0,+\infty)$．

习题1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-3x-10}$；　(2) $y=\log_2\dfrac{1}{x+1}$；

(3) $y=\begin{cases}\sqrt{x-2}, & x<5,\\ \dfrac{1}{x-6}, & x\geqslant 5;\end{cases}$　(4) $y=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

2. 求下列函数的值.

(1) $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+3}$，求 $f(-1)$，$f(5)$.

(2) $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ 求 $\operatorname{sgn} 2$，$\operatorname{sgn}(-1)$，$\operatorname{sgn} 0$.

第二节 函数的性质

思政元素

我们在生活中观察到的现象和研究的问题都有一个变化的过程，没有什么是一成不变的. 正因为这种多变性，世界才如此丰富多彩. 函数根植的土壤就是这种变化的环境，这在函数的定义中就能体会到——因变量随着自变量的变化而变化. 因此，函数本身所反映的就是自然界的规律，把现实的量数量化，就能用函数来表示自然界中事物的变化.

一、奇偶性

定义 1　设函数的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对于任意的 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为**偶函数**. 否则 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

奇函数的图象关于原点对称，如图 1-4 所示；偶函数的图象关于 y 轴对称，如图 1-5 所示.

函数的性质

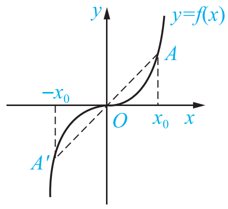


图 1-4

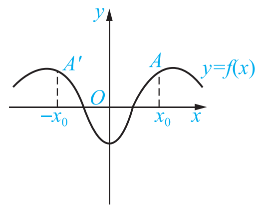


图 1-5

注　意

在判断函数的奇偶性时，一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称．若不关于原点对称，则为非奇非偶函数．

【例 1】 判断下列函数的奇偶性．

(1) $f(x)=x^2$；　　(2) $f(x)=2\sin 2x$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$；　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$．

【解】 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 是关于原点对称的区间，又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数．

(2) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间，又因为对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=2\sin(-2x)=-2\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)=2\sin 2x$ 是奇函数．

(3) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，定义域不关于原点对称，所以$f(x)=\dfrac{1}{x-1}$是非奇非偶函数．

(4) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间，又因为对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，都有 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$，所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$是偶函数．

二、单调性

定义 2 若对于区间 D 内任意的两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，那么$f(x)$在区间 D 上单调增加，称 $f(x)$为 D 上的单调递增函数，区间 D 称为 $f(x)$的单调增区间；特别地，若成立严格不等式 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$为 D 上的严格增函数．如果恒有$f(x_1)\geqslant f(x_2)$，那么 $f(x)$在区间 D 上单调减少，称 $f(x)$为 D 上的单调递减函数，区间 D 称为 $f(x)$的单调递减区间．特别地，若成立严格不等式 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$为 D 上的严格减函数．

单调增函数图象沿 x 轴正向上升，如图 1-6 所示；单调减函数图象沿 x 轴正向下降，如图 1-7 所示．

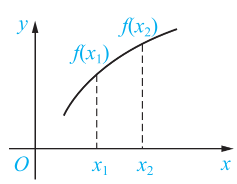


图 1-6

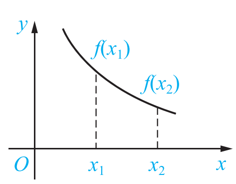


图 1-7

【例 2】　证明：$f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数，在区间$(-\infty,0)$上是单调递减函数.

【证明】　设 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$.

则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$.

因为 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2>0$，$x_1-x_2<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调递增函数.

设 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)$.

因为 x_1、$x_2\in(-\infty,0)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2<0$，$x_1-x_2<0$.

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0)$上是单调递减函数.

三、有界性

定义 3　设函数 $f(x)$的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有上界，K_1 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个上界（任何大于 K_1 的数也是 $f(x)$在 X 上的上界）；如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有下界，K_2 称为函数 $f(x)$在 X 上的一个下界（任何小于 K_2 的数也是 $f(x)$在 X 上的下界）；如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$在 X 上有界，如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$在 X 上无界. 这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使$|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$在 X 上无界.

【例 3】　就函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内来说，数 1 是它的一个上界，数-1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于-1 的任何数也是它的下界）. 又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M，$|f(x)|\leqslant M$ 均成立）.

四、周期性

定义 4　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 对于任意的 $x\in D$，如果存在不为零的数 T，使得$f(x+T)=f(x)$，那么 $f(x)$为 D 上的周期函数. T 称为 $f(x)$的一个周期，并且 nT（n 为非零整数）也是它的周期. 通常，我们把函数的最小正周期称为函数的周期.

【例 4】　函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象分别如图 1-8 和图 1-9 所示.

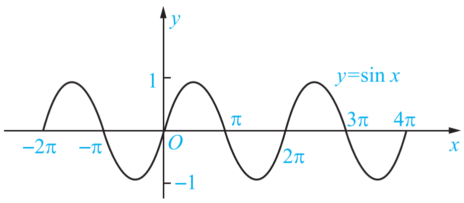


图 1-8

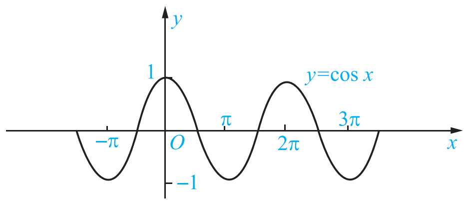


图 1-9

习题1-2

1. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\cos x+3$；　(2) $y=\lg(1+x)$；

(3) $y=\sqrt{x^2-4}$；　(4) $y=x^2+2x$.

2. 求下列函数的单调区间.

(1) $y=x^2-x$；　(2) $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$；

(3) $y=2\log_4 x$；　(4) $y=x^2+3x-18(x>-6)$.

3. 下列哪些函数是周期函数？如果是周期函数，请指出其周期.

(1) $y=\sin(2x+3)$；　(2) $y=x\cos x$；

(3) $y=\cos 2x$；　(4) $y=\tan\frac{x}{5}$.

4. 下列哪些函数是有界函数？

(1) $y=x^2(-1<x<2)$；　(2) $y=\sin 2x$；

(3) $y=\frac{1}{x}$；　(4) $y=\log_2 x(x<1)$.

第三节 反函数

思政元素

中国数学家熊庆来在“函数理论”领域造诣很深. 1932 年，他第一次代表中国出席了在瑞士苏黎世召开的国际数学家大会. 1933 年，他获得法国国家理科博士学位，成为第一个在国际上得到最高学位的中国人. 1934 年，他发表了论文《关于无穷级整函数与亚纯函数》. 在这篇论文中，熊庆来所定义的“无穷级函数”，国际上称为“熊氏无穷数”，被载入世界数学史册，奠定了他在国际数学界的地位.

定义　在函数的定义中，按关系式

$$y=f(x),x\in A,y\in B,\tag{1-1}$$

x 是自变量，y 是因变量（函数）．在关系式 $y=f(x)$ 中，如果反过来，将 y 看成自变量，x 看成因变量（函数），即对每一个 $y\in B$，按 $y=f(x)$ 都有唯一确定的 x 值与之对应，则称 x 是 y 的反函数．在求反函数的表达式时，可将关系式 $y=f(x)$ 看成一个方程式，从中将 x 解出，写作

$$x=\varphi(y),y\in B, \tag{1-2}$$

这就是反函数的表达式．习惯上自变量的记号取作 x，故将式（1-2）中 x,y 记号对换（对应关系不变），得

反函数

$$y=\varphi(x),x\in B, \tag{1-3}$$

它仍是 $y=f(x)$ 的反函数．若将 φ 记为 f^{-1}，则式（1-3）可写为

$$y=f^{-1}(x),x\in B. \tag{1-4}$$

因此，式（1-2）、式（1-3）与式（1-4）都是式（1-1）的反函数，只是表示的记号不同．

【例】　求下列函数的反函数 $y=f^{-1}(x)$．

（1）$y=f(x)=\mathrm{e}^{x+3}$；　　（2）$y=f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$；

（3）$y=f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$．

【解】　（1）从 $y=\mathrm{e}^{x+3}$ 中解出 x．取自然对数得 $\ln y=x+3$，解得 $x=\ln y-3$，再将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln x-3.$$

（2）从 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 中解出 x．由 $(x-1)y=x+1$，整理后得 $x(y-1)=1+y$，解出 $x=\dfrac{y+1}{y-1}$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\frac{x+1}{x-1},$$

这里，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 就是函数 $y=f(x)$ 本身．

（3）从 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 中解出 x．由于 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{2\mathrm{e}^{x}}$，即

$$(\mathrm{e}^{x})^{2}-2y\mathrm{e}^{x}-1=0,$$

解得 $\mathrm{e}^{x}=y\pm\sqrt{y^{2}+1}$，因为 $\mathrm{e}^{x}>0$，故舍去 $\mathrm{e}^{x}=y-\sqrt{y^{2}+1}$，即得 $x=\ln(y+\sqrt{y^{2}+1})$，将 x 与 y 对换，得所求反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\ln(x+\sqrt{x^{2}+1}).$$

习题1–3

1. 求下列函数的反函数．

（1）$y=\dfrac{2x-5}{x-3}$；　　（2）$y=1-3^{x}$；

（3）$y=1+\lg(x+2)$；　　（4）设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x+1}{x}$，求 $f(x)$，$f^{-1}(x)$．

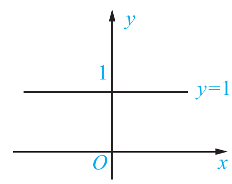
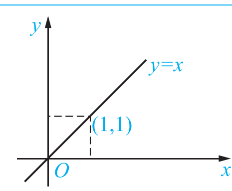
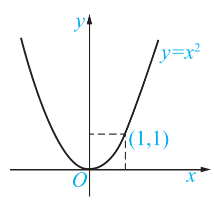
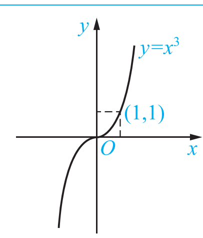
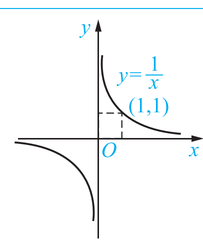
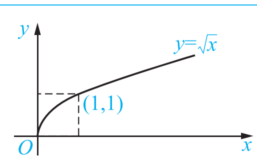
2. 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{4}$ 的反函数，并求其反函数的定义域和值域．

第四节 初等函数

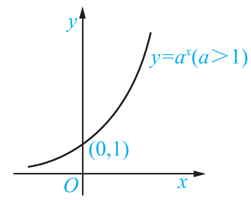
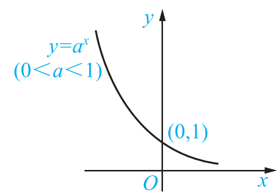
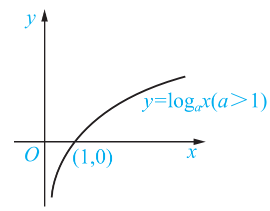
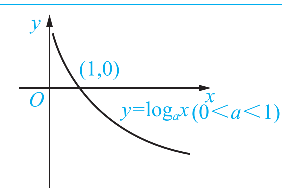
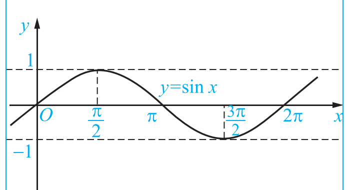
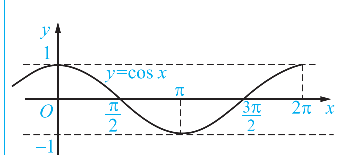
一、基本初等函数

我们把常数函数 $y=c$（c 为常数）、幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0,a\neq1,a$ 为常数）、对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0,a\neq1,a$ 为常数）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 为了便于以后的学习，几种常见的基本初等函数的定义域、值域、图象和性质如表 1-1 所示.

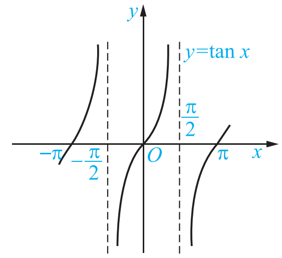
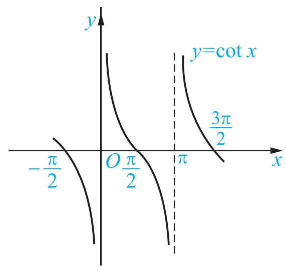
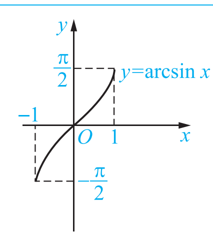
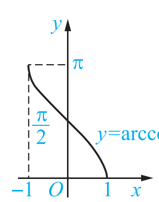
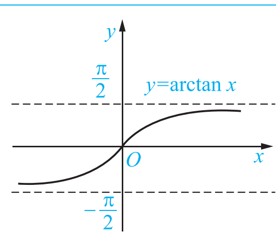
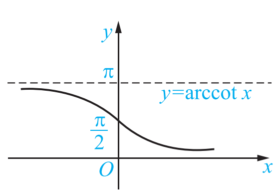
表 1-1

函数		定义域	值域	图象	性质
常数函数	$y=1$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in\{1\}$		偶函数，有界
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{2}$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0]$内单调减少 在$[0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^{3}$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$	$y\in[0,+\infty)$		单调增加

续表

函数		定义域	值域	图象	性质
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$	$y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$		奇函数，周期为 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$($k\in\mathbf{Z}$)内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$($k\in\mathbf{Z}$)内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$		偶函数，周期为 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$($k\in\mathbf{Z}$)内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$($k\in\mathbf{Z}$)内单调增加

续表

	函数	定义域	值域	图象	性质
三角函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $(k\pi,k\pi+\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 内单调减少
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$	$y\in[0,\pi]$		单调减少,有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in(0,\pi)$		单调减少,有界

二、复合函数

定义 1　若函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$，且 $u=g(x)$的值域或部分值域包含在 $f(u)$的定义域中，则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系，这个对应关系称为 **y 是 x 的复合函数**，u 是**中间变量**，x 是**自变量**，通常将

$$y=f(u),u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)].$$

例如，$y=\sin^2 x$，就是由 $y=u^2$，$u=\sin x$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

同样地，$y=\sqrt{1-x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成的，这个复合函数的定义域为$[-1,1]$，它只是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分.

注　意

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数；复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

【例 1】　指出下列函数的复合过程.

（1）$y=\cos^2 x$；　　　　（2）$y=\sqrt{x^2+2x}$.

【解】　（1）$y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$，$u=\cos x$ 复合而成的.

（2）$y=\sqrt{x^2+2x}$是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2+2x$ 复合而成的.

【例 2】　设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\log_2 x$，求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$.

【解】　$f[g(x)]=[g(x)]^2=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x$；

$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|$；

$f[f(x)]=(f(x))^2=(x^2)^2=x^4$.

三、初等函数

定义 2　基本初等函数（常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）经过有限次的加、减、乘、除（分母不为零）的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数，叫作**初等函数**.

例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$是一个初等函数.

又如，函数 $y=x^x$，由于 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$，因此

$$y=x^x=e^{x\ln x}$$

是由 $y=e^u$，$u=x\ln x$ 复合而成的函数，因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示，那么它就不是初等函数．例如，函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 就不是初等函数，我们将这样的函数，叫作**非初等函数**．

【例 3】 已知(1) $f(2x-1)=x^2$；(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$．求 $f(x)$．

【解】 (1) 令 $2x-1=t$，解出 $x=\dfrac{1+t}{2}$，由题设，得

$$f(t)=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2=\frac{(1+t)^2}{4}.$$

由于函数关系与变量的记号无关，将变量的记号 t 换成 x，得所求函数为

$$f(x)=\frac{(1+x)^2}{4}.$$

(2) 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}(t\neq 0)$，由题设，得

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{1}{t}+\frac{\sqrt{t^2+1}}{|t|}.$$

将变量的记号 t 换成 x，得所求函数为

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}.$$

注　意

函数关系与变量的记号无关．例如，$f(t)=\dfrac{(1+t)^2}{4}$ 与 $f(x)=\dfrac{(1+x)^2}{4}$ 是同一函数．

【例 4】 试设置中间变量，将复合函数 $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$ 分解成若干个简单函数．

【解】 由内层依次到外层，层层设置中间变量，即令

$$v=\frac{x}{2},u=\sin v.$$

于是，函数 $y=\ln\sin\dfrac{x}{2}$ 可写成

$$y=\ln u,u=\sin v,v=\frac{x}{2},$$

其中 u,v 是中间变量．

习题1–4

1．设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=\varphi(x)=\ln x$，写出复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的表达式．

2．设 $y=f(u)=\arctan u$，$u=\varphi(v)=\sqrt{v}$，$v=h(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$，写出复合函数 $y=f\{\varphi[h(x)]\}$ 的表达式．

3. 将下列复合函数拆开为几个简单函数.

(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$；　　(2) $y=\ln\cos\dfrac{x}{2}$.

复习题一

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln(1-2x)}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-|x|}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ \sqrt{x^2-1}, & |x|\geqslant 1;\end{cases}$　　(6) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

2. 求下列函数的值.

(1) $f(x)=\dfrac{1+|x-1|}{x+1}$，求 $f(-2)$，$f(1)$，$f(0)$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x}, & x<0,\\ |\sin x|, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(-4)$，$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)$，$f(x_0+h)$.

3. 将几个简单函数复合成一个复合函数.

(1) 设 $y=f(u)=e^u$，$u=u(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$ 写出复合函数 $y=f[u(x)]$ 的表达式.

(2) 设 $f(x)=5^x$，$g(x)=\log_5 x$，写出 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$f[f(x)]$，$g[g(x)]$ 的表达式.

4. 设置中间变量，将下列复合函数拆分为几个简单函数.

(1) $y=\sin^2(\omega x+\varphi)$（$\omega$，$\varphi$ 为常数）；　　(2) $y=\sqrt{\arctan\sqrt{x}}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{x}{2}$；　　(2) $y=x^2$，$x\geqslant 0$；

(3) $y=1+\log_2(x+5)$；　　(4) $y=\sqrt{1-x^2}$，$-1\leqslant x\leqslant 0$.

6. 下列函数是否具有奇偶性？如有，指出是奇函数还是偶函数.

(1) $y=x\cos 2x$；　　(2) $y=1+x^4$；

(3) $y=xe^{-x}$；　　(4) $y=\dfrac{\cos x}{x}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(6) $y=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

7. 下列函数是否具有周期性？如有，指出其最小正周期.

(1) $y=4\sin\pi x$；　　(2) $y=|\sin x|$；

(3) $y=|\sin x|+|\cos x|$；　　(4) $y=e^x\cos x$.

8. 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=x$，求 $f(x)$，$f(x^2)$.

9. 一圆柱形罐头(有盖),表面积一定,试将其容积 V 表示为底面半径 r 的函数.

10. 某厂生产产品 1 000 t,定价为 130 元/t.当售出量不超过 700 t 时,按原定价出售;超过 700 t 的部分按原价的九折出售.试将销售收入表示成销售量的函数.

思政园地 ★

近代数学家——李善兰

李善兰,原名李心兰,字竟芳,号秋纫,别号壬叔,出生于 1811 年 1 月 22 日,逝世于 1882 年 12 月 9 日,浙江海宁人,是中国近代著名的数学家、天文学家、力学家和植物学家.他创立了二次平方根的幂级数展开式,并研究各种三角函数、反三角函数和对数函数的幂级数展开式(现称“自然数幂求和公式”),这是李善兰也是 19 世纪中国数学界最重大的成就.

李善兰在数学研究方面的成就,主要有尖锥术、垛积术和素数论三项.尖锥术理论主要见于《方圆阐幽》《弧矢启秘》《对数探源》三本著作,成书年代约为 1845 年,当时解析几何与微积分学尚未传入中国.李善兰创立的“尖锥”概念,是一种处理代数问题的几何模型,他对“尖锥曲线”的描述实质上相当于给出了直线、抛物线、立方抛物线等方程.

他创造的“尖锥求积术”,相当于幂函数的定积分公式和逐项积分法则.他用“分离元数法”独立地得出了二项平方根的幂级数展开式,结合“尖锥求积术”得到了 π 的无穷级数表达式、各种三角函数和反三角函数的展开式,以及对数函数的展开式.

他在使用微积分方法处理数学问题方面取得了创造性的成就.垛积术理论主要见于《垛积比类》,该书写于 1859—1867 年,是有关高阶等差级数的著作.李善兰从研究中国传统的垛积问题入手,获得了一些相当于现代组合数学中的成果.例如,“三角垛有积求高开方廉隅表”和“乘方垛各廉表”实质上就是组合数学中著名的第一种斯特林数和欧拉数.

自 20 世纪 30 年代以来,《垛积比类》受到国际数学界的普遍关注和赞赏,可以认为是早期“组合论”的杰作.素数论主要见于《考数根法》,该书发表于 1872 年,是中国“素数论”方面最早的著作.在判别一个自然数是否为素数时,李善兰证明了著名的费马素数定理,并指出了它的逆定理不真.

在 19 世纪把西方近代物理学知识翻译为中文的传播工作中,李善兰做出了重大贡献.他的译书也为中国近代物理学的发展起到启蒙作用.同治七年,李善兰到北京担任同文馆天文、算学部长,执教达 13 年之久,为造就中国近代第一代科学人才做出了贡献.他一生翻译西方科技书籍甚多,将近代科学最主要的几门知识(从天文学到植物细胞学)的最新成果介绍传入中国,对促进中国近代科学的发展做出了卓越贡献.

讨论:

1. 李善兰先生为中国数学的发展做出了哪些贡献?
2. 通过以上事例,你学到了什么?