第 1 章　复数与复平面

复数是复变函数的基础，复变函数就是自变量为复数的函数. 本章主要介绍复数的概念、复数的性质及复数的运算，引入复平面上点集的概念.

1.1　复　数

1.1.1　复数域

定义 1.1　形如

$$z=x+y\mathrm{i} \text{ 或 } z=x+\mathrm{i}y$$

的数，称为**复数**，其中 x 与 y 为任意实数，i 为虚数单位(即 $\mathrm{i}^2=-1$).

所有复数构成复数集，通常用大写字母 **C** 表示.

在复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 中，x 与 y 分别称为复数 z 的**实部**和**虚部**，记作

$$x=\mathrm{Re}\ z, y=\mathrm{Im}\ z.$$

当虚部 $y=0$ 时，$z=x$ 是实数；当且仅当 $x=y=0$ 时，$z=0$；当虚部 $y\neq0$ 时，z 称为虚数；当实部 $x=0$ 且虚部 $y\neq0$ 时，$z=y\mathrm{i}$ 称为**纯虚数**.

由此可知，实数集 **R** 为复数集 **C** 的真子集即 $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

如果两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 的实部和虚部分别相等，即

$$x_1=x_2, y_1=y_2,$$

则称复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 相等.

由此可知，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 等于零，当且仅当它的实部 x 和虚部 y 同时为零.

注意　一般情况下，两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 只能说相等或者不相等，而不能比较大小.

1.1.2　复平面与复数的向量表示

由两个复数相等的定义，我们知道，任意一个复数 $z=x+y\mathrm{i}$，都可以由一个有序实数对 (x,y) 唯一确定；我们还知道，有序实数对 (x,y) 与平面直角坐标系中的点是一一对应的. 由此，可以建立复数集与平面直角坐标系中的点集之间的一一对应关系.

定义 1.2　如图 1－1 所示，平面上点 z 的横坐标为 x，纵坐标为 y，复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可用点 $z(x,y)$ 表示，这个建立了用直角坐标系表示复数的平面称为**复平面**，其中 x 轴称为**实轴**，

y 轴称为**虚轴**. 所以,实轴上的点都是实数;虚轴上的点(除原点外)均为纯虚数,故点 $z(x,y)$ 与复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 表示相同的内容.

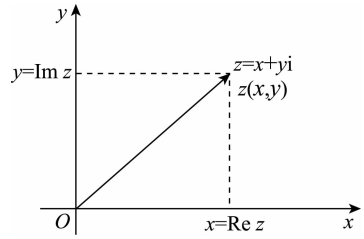

图 1－1

两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,如果满足

$$x_1=x_2,y_1=-y_2,$$

则这两个复数互为**共轭复数**. 复数 z 的共轭复数一般用$\bar{z}$表示,即如果 $z=x+y\mathrm{i}$,则$\bar{z}=\overline{x+y\mathrm{i}}=x-y\mathrm{i}$. 当复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的虚部 $y=0$ 时,有$\bar{z}=z$,即任意实数的共轭复数为它本身.

在复平面上,复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 可以用由原点引向复数点 Z 的向量$\overrightarrow{OZ}$来表示,这种表示方式建立了复数集 **C** 与平面向量所成的集合的一一对应(实数 0 与零向量对应)关系,向量$\overrightarrow{OZ}$的长度称为复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 的**模**,记为$|z|$,因此有

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0.$$

显然,$|\mathrm{Re}\,z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$,$|\mathrm{Im}\,z|\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$.

1.1.3 复数的运算

1. 复数的加法

定义 1.3 设复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$,$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,则称下式

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathrm{i} \tag{1.1}$$

为复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$ 和 $z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 的加法.

复数的加法按实部与实部相加,虚部与虚部相加,遵循交换律和结合律.

由此可以看出,复数的加法可以按照向量的平行四边形法则来进行运算,如图 1－2 所示. 同时,规定复数的减法为复数加法的逆运算,即是把满足$(x_2+y_2\mathrm{i})+(x+y\mathrm{i})=x_1+y_1\mathrm{i}$ 的复数 $x+y\mathrm{i}$,称为复数 $x_1+y_1\mathrm{i}$ 减去复数 $x_2+y_2\mathrm{i}$ 的差.

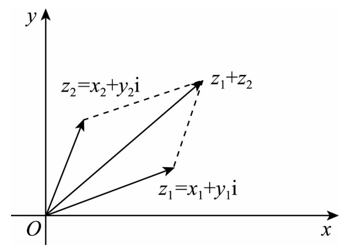

图 1－2

2. 复数的乘法

定义 1.4 两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$,$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$,按照多项式乘法原则进行计算得到这两个复数的乘积,即

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2&=(x_1+y_1\mathrm{i})\cdot(x_2+y_2\mathrm{i})=x_1x_2+y_1x_2\mathrm{i}+x_1y_2\mathrm{i}+y_1y_2\mathrm{i}^2\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+(y_1x_2+x_1y_2)\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

复数的乘法遵循交换律和结合律,且遵循乘法对加法的分配律.

除法作为乘法的逆运算,两个复数 $z_1=x_1+y_1\mathrm{i}$,$z_2=x_2+y_2\mathrm{i}$ 相除($z_2\neq 0$)时,有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1\mathrm{i}}{x_2+y_2\mathrm{i}}=\frac{(x_1+y_1\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}{(x_2+y_2\mathrm{i})(x_2-y_2\mathrm{i})}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}. \tag{1.3}$$

全体复数在引进上述运算后称为复数域.在复数域内,我们熟悉的一切代数恒等式仍然成立,比如:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

关于复数的模和共轭复数有如下结论(其证明留给读者课后证明):

(1) $\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$;

(2) $|\bar{z}|=|z|$; $\bar{\bar{z}}=z$;

(3) $\overline{(z+w)}=\bar{z}+\bar{w}$; $\overline{zw}=\bar{z}\,\bar{w}$; $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{w}}(\bar{w}\neq 0)$;

(4) $\left|\frac{z}{w}\right|=\frac{|z|}{|w|}$; $|zw|=|z||w|$.

1.1.4 复数的三角表示及方根

1. 复数的三角表示

复平面上不为零的点 $z=x+y\mathrm{i}$,如图 1－3 所示,其极坐标为 (r,θ): $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.显然 $r=|z|$,θ 是实轴正向到非零点 $z=x+y\mathrm{i}$ 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 之间的夹角,称为复数 z 的**辐角**,记为 $\theta=\operatorname{Arg} z$.则有

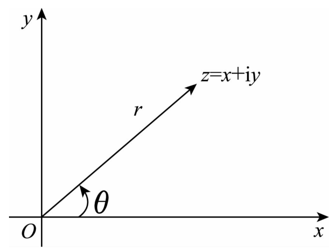

图 1－3

$$\tan\theta=\frac{y}{x}\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right).$$

任一非零复数 z 有无穷多个辐角,它们相差 2π 的整数倍.我们通常把满足条件

$$-\pi<\theta\leqslant\pi \tag{1.4}$$

的辐角 θ 称为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值或为 z 的主辐角,记为 $\theta=\arg z$.则有

$$\theta=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{1.5}$$

在极坐标系下,复数 z 的三角表示形式为

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.6}$$

再应用欧拉公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,可以将复数 z 写成指数形式:

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.7}$$

【例 1.1】 计算 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

解 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}=\mathrm{i}$.

【例 1.2】 求 $\operatorname{Arg}(-2-4\mathrm{i})$.

解 由(1.5)式可得

$$\mathrm{Arg}(-2-4\mathrm{i})=\arg(-2-4\mathrm{i})+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

再由 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$,点 $-2-4\mathrm{i}$ 位于第三象限得,

$$\arg(-2-4\mathrm{i})=\arctan\frac{-4}{-2}-\pi=\arctan2-\pi.$$

所以有

$$\mathrm{Arg}(-2-4\mathrm{i})=\arctan2+(2k-1)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

【例 1.3】 把复数 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 表示成三角形式和指数形式.

解 由题意得:$r=\sqrt{3+1}=2,\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$且与 $z=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 对应的点在第一象限,所以

$$\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})=\frac{\pi}{6}.$$

故三角形式为

$$z=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

指数形式为

$$z=\sqrt{3}+\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}.$$

2. 复数的几何意义

由复数的三角形式,我们可以得到复数乘法的几何意义.

设有复数 z_1,z_2,其三角形式分别为

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\ z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2).$$

利用复数乘法运算的法则及正弦、余弦三角公式,我们可以得到

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\&=r_1\cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

因此,用指数形式表示如下

$$z_1\cdot z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}. \tag{1.8}$$

由(1.8 式)得

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\ z_1+\mathrm{Arg}\ z_2. \tag{1.10}$$

由图 1—4 说明了两个复数相乘的几何意义:两个复数相乘,其积的模等于这两个复数的模的积,其积的辐角等于这两个复数的辐角的和.

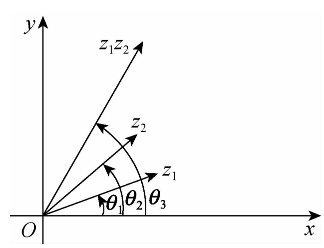

图 1—4

由(1.9)、(1.10)式可得

$$|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2|,$$

$$\mathrm{Arg}\ z_1=\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)+\mathrm{Arg}\ z_2.$$

所以有

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}\ z_1-\mathrm{Arg}\ z_2. \tag{1.11}$$

由此可见,两个复数的商的模等于这两个复数模的商,其辐角等于被除数的辐角与除数的辐角的差.

3. 复数的幂与方根

设复数 $z=re^{i\theta}$,则 z 的 n 次幂可利用(1.8)式得

$$\begin{aligned}z^n&=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\&=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^n e^{in\theta}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

从而有

$$|z^n|=|z|^n.$$

其中 n 为正整数.

当 $r=1$ 时,得棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta. \tag{1.13}$$

复数的 n 次方根是复数 n 次幂的逆运算.

设 $z=re^{i\theta}$,n 为正整数,则称满足方程

$$w^n=z$$

的所有的复数 w 为 z 的 n 次方根,记为

$$w=\sqrt[n]{z}.$$

现在用复数的指数形式来讨论复数的 n 次方根.具体步骤为:先假定复数存在 n 次方根,然后再计算找出这些 n 次方根.

设 $w=\rho e^{i\varphi}$,由复数 z 的 n 次方根的定义,得

$$w^n=\rho^n e^{in\varphi}=re^{i\theta}.$$

记 $\theta_0=\arg z$,则有

$$\rho^n=r,n\varphi=\theta_0+2k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

解得

$$\rho=\sqrt[n]{r},\varphi=\frac{\theta_0+2k\pi}{n},k=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

其中$\sqrt[n]{r}$是算术根,所以

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}},k=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{1.14}$$

若记 $w_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta_0}{n}}$,则 w_k 可表示为

$$w_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta_0}{n}},w_k=w_0e^{i\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,2,\cdots,n-1. \tag{1.15}$$

这就是说,复数的 n 次方根是 n 个复数,这些方根的模都等于这个复数的模的 n 次算术根,它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 $0,1,2,\cdots,n-1$ 倍的和的 n 分之一.在复

平面上，这 n 个根均匀分布在一个以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上，它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点，如图 1－5 所示.

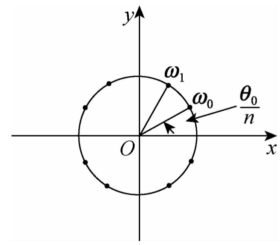

图 1－5

【**例 1.4**】 求 $2-2\mathrm{i}$ 的立方根.

解 因为 $2-2\mathrm{i}=2\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{4}}$，所以 $2-2\mathrm{i}$ 的立方根是

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi+8k\pi}{12}},k=0,1,2.$$

即 $2-2\mathrm{i}$ 的立方根是

$$\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{7\pi}{12}\mathrm{i}},\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4}\mathrm{i}},\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{23\pi}{12}\mathrm{i}}.$$

【**例 1.5**】 计算 n 次单位根.

解 由于 $1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$，所以给出如下这些根

$$1,\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{n}\mathrm{i}},\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{n}\mathrm{i}},\cdots,\mathrm{e}^{\frac{2(n-1)\pi}{n}\mathrm{i}}.$$

特别地，立方单位根是

$$1,\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}),\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

1.2 复平面

我们在平面中遇到的线段、直线和圆等一些曲线围成的区域都是复平面上的一种点集. 后面我们研究的解析函数的定义域与值域也都是复平面上的某个点集. 在此，我们介绍复平面上的点集.

1.2.1 复平面上点集的几个基本概念

定义 1.5 集合

$$D(z_0,\delta)=\{z \mid |z-z_0|<\delta\}, \tag{1.16}$$

称为点 z_0 的 δ **邻域**，其中 $\delta>0$.

集合

$$D(z_0,\delta)\setminus\{z_0\}=\{z \mid 0<|z-z_0|<\delta\},$$

称为点 z_0 的 δ **去心邻域**，其中 $\delta>0$.

定义 1.6 若点集 E 的点 z_0，有一个 z_0 的邻域 $D(z_0,\delta)\subset E$，则称 z_0 为 E 的一个**内点**. 如果点集 E 中的点全为内点，则称 E 为**开集**.

定义 1.7 如果点 z_0 的任意邻域内，既有属于 E 中的点，又有不属于 E 中的点，则称 z_0 为 E 的**边界点**. 集合 E 的所有边界点所组成的集合称为 E 的**边界**，记作 ∂E.

定义 1.8 如果点集 E 内的任何两点可以用包含在 E 内的一条折线连接起来，则集合为连通集，连通的开集称为**区域**.

区域 D 和它的边界 ∂D 的并集称为**闭区域**，记为 $\overline{D}$.

定义 1.9 如果存在正数 M，使得对一切 $z\in E$，有

$$|z| \leqslant M,$$

则称 E 为**有界集**. 若区域 D 有界，则称为**有界区域**.

定义 1.10　设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是实变量 t 的两个实函数，它们在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$$

或由复值函数

$$z(t)=x(t)+y(t)\mathrm{i}$$

定义的集合 Γ 称为复平面上的一条曲线，上述方程称为曲线 Γ 的参数方程. 点 $A=z(\alpha)$ 和 $B=z(\beta)$ 分别称为曲线 Γ 的起点和终点. 如果任取 $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$，且 $t_1 \neq t_2$ 时，有 $z(t_1) \neq z(t_2)$，称曲线 Γ 为**简单曲线**，也称为约当(Jordan)曲线. 如果 Γ 的两端点 $z(\alpha)$ 和 $z(\beta)$ 重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，那么简单曲线 Γ 称为**简单闭曲线**. 例如圆周

$$x=r\cos t, y=r\sin t, t\in[0,2\pi].$$

就是简单闭曲线. 如图 1－6 所示，用复数表示为

$$|z|=r.$$

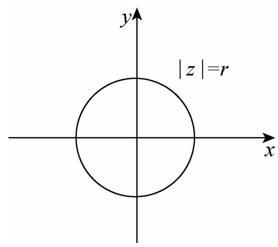

图 1－6

我们容易验证圆 $|z|=r$ 将平面分为两个不相交的区域，由不等式 $|z|<r$ 和 $|z|>r$ 所规定，这两个区域以圆周为边界. 这个结果是以下约当定理的特例.

定理 1.1　一条简单闭曲线将平面分成两个不相交的区域，以曲线为公共边界.

这两个区域，一个是有界的，称为曲线的内部；一个是无界的，称为曲线的外部.

如果曲线 Γ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 存在、连续，而且不同时为零，则称曲线 Γ 为**光滑曲线**. 由有限条光滑曲线连接而成的连续曲线，称为**分段光滑曲线**.

定义 1.11　设 D 为复平面上的区域，如果在 D 内的任意简单闭曲线的内部均属于 D，则称 D 为**单连通区域**；否则就称为**多连通区域**.

1.2.2　直线和半平面

设 L 表示复平面 C 中的直线，从初等解析几何知道，L 是由 L 上的一个点和一个方向向量决定的. 如果 a 是 L 上的任一点，b 是它的方向向量，那么

$$L=\{z=a+bt \mid -\infty<t<+\infty\}.$$

由于 $b\neq 0$，因此，对于 L 上的 z，有

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0.$$

事实上，如果 z 满足等式

$$0=\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right),$$

那么

$$t=\frac{z-a}{b},$$

蕴涵着 $z=a+bt, -\infty<t<+\infty$. 因此

$$L=\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\}. \tag{1.17}$$

集合

$$\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\} \tag{1.18}$$

和

$$\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\} \tag{1.19}$$

的轨迹是什么呢？我们首先考虑简单的情形. 注意到 b 是一个方向向量，我们可以假定 $|b|=1$，先考虑 $a=0$ 的情形. 记

$$H_0=\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z}{b}\right)>0\right\},$$

$b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. 如果 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z/b=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\beta)}$. 于是 $z\in H_0$，当且仅当 $\sin(\theta-\beta)>0$，即 $\beta<\theta<\pi+\beta$. 所以，如果我们“按照 b 的方向沿着 L 前进”，H_0 是位于 L 的左边的半平面. 如果我们令

$$H_a=\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)>0\right\},$$

那么容易看出，$H_a=a+H_0=\{a+w \mid w\in H_0\}$，即 H_a 是由半平面 H_0 平移 a 而得到的，因此，H_a 是位于 L 的左边的半平面. 类似地，

$$K_a=\left\{z \mid \operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)<0\right\},$$

是位于 L 的右边的半平面.

1.2.3 扩充复平面及其球面表示

在复函数中，常常遇到这样的一些函数，当自变量趋于一个给定点时，函数值趋向无穷. 为了研究这样的情形，有必要将复数系统加以扩充，引入一个数∞，在微积分学中，∞不是一个定值，它代表的是变量无限增大的符号；而在这里，把它作为一个定值. 它的运算规定如下：

设 a 是异于∞的一个复数，我们规定：

(1) $a\neq\infty$，则 $a+\infty=\infty+a=\infty$；

(2) $a\neq 0$，则 $a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty$；

(3) $a\neq\infty$，则 $\frac{a}{\infty}=0, \frac{\infty}{a}=\infty$；

(4) $a\neq 0$，则 $\frac{a}{0}=\infty$；

(5) $|\infty|=+\infty$，∞的实部、虚部、辐角都无意义；

(6)为了避免和算术定律相矛盾，对

$$\infty\cdot\infty,\infty\pm\infty,0\cdot\infty,\frac{\infty}{\infty},\frac{0}{0},$$

均不规定其意义.

在复平面上没有一点和∞对应，但是我们可以设想平面上有一个理想点和它对应.这个理想点称为无穷远点.复平面加上∞，称为扩充复平面$C_\infty=C\cup\{\infty\}$.为使无穷远点的存在得到直观的解释，我们建立扩充复平面C_∞的球面表示法.

如图1－7所示，记R^3中的单位球面为

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}.$$

设$N=(0,0,1)$为S上的北极点，把C等同于R^3中的点集$\{(x_1,x_2,0)\,|\,x_1,x_2\in\mathbf{R}\}$，于是$C$沿赤道切割$S$.对于复平面$C$内任意一点$z$，用直线将$z$与北极点$N$相连接，此直线与球面$S$恰好交于一点$Z\neq N$.若$|z|>1$，那么$Z$位于北半球面上；若$|z|<1$，$Z$点位于南半球面上；若$|z|=1$，那么$Z=z$.当$|z|\to+\infty$时，$Z$怎样变化呢？很显然，$Z\to N$.因此，我们把$N$与扩充复平面中的$\infty$等同起来，这样，扩充复平面$C_\infty$就与球面$S$之间建立了一一对应的关系.这样的球面称为复球面，它是扩充复平面的几何模型.

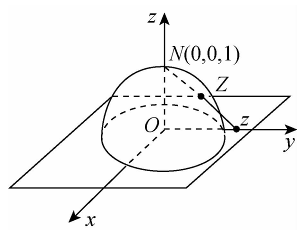

图1－7

习题1

1.用复数的代数形式$a+b\mathrm{i}$表示下列复数.

(1) $e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$；　　(2) $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{1+7\mathrm{i}}$；

(3) $(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})$；　　(4) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$.

2.求下列各复数的实部和虚部($z=x+\mathrm{i}y$).

(1) $\dfrac{z-a}{z+a}(a\in\mathbf{R})$；　　(2) z^3；

(3) $\left(\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$；　　(4) $\left(\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3$；

(5) i^n.

3.求下列复数的模和共轭复数.

(1) $-2+\mathrm{i}$；　　(2) -3；

(3) $(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})$；　　(4) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$.

4.证明：当且仅当$z=\bar{z}$时，z才是实数.

5.设$z,w\in C$，证明：$|z+w|\leqslant|z|+|w|$.

6. 设 $z,w\in C$，证明下列等式.

(1) $|z+w|^2=|z|^2+2\mathrm{Re}\, z\overline{w}+|w|^2$；

(2) $|z-w|^2=|z|^2-2\mathrm{Re}\, z\overline{w}+|w|^2$；

(3) $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$.

并给出最后一个等式的几何解释.

7. 将下列复数表示为指数形式或三角形式.

(1) $\dfrac{3+5\mathrm{i}}{1+7\mathrm{i}}$；　　(2) i；

(3) -1；　　(4) $-8\pi(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$；

(5) $\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^3$.

8. 计算.

(1) i 的三次根；　　(2) -1 的三次根；

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根.

9. 设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$，$n\geqslant 2$，证明：$1+z+\cdots+z^{n-1}=0$.

10. 证明：若复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，则有

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|,$$

并作出几何解释.

11. 设 Γ 是圆周 $\{z\,|\,|z-c|=r\}$，$r>0$，$a=c+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. 令

$$L_\beta=\left\{z\,\middle|\,\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\},$$

其中 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. 求出 L_β 在 a 切于圆周 Γ 的关于 β 的充分必要条件.

12. 指出下列各式中点 z 所确定的平面图形，并作出草图.

(1) $\arg z=\pi$；

(2) $|z-1|=|z|$；

(3) $1<|z+\mathrm{i}|<2$；

(4) $\mathrm{Re}\, z>\mathrm{Im}\, z$；

(5) $\mathrm{Im}\, z>1$ 且 $|z|<2$.