第 1 章　极限与连续

1.1　预 备 知 识

1. 集合

定义 1.1　某些指定的对象集在一起就成为一个集合，其中每一个对象叫元素.

注：集合的元素不仅可以是抽象的数，也可以是一些具体的事物.

例如：将某工厂某天生产的一批产品看成一个集合，其元素就是该批产品中的每个单个产品；

若将某工厂这个月生产的多批产品看成一个集合，其元素就是该月生产的各批产品；

不包含任何元素的集合，称为空集，记作 $\varnothing$；称全部元素构成的集合为全集，记作 S.

集合的三要性　确定性、互异性、无序性.

集合的表示　{……}　如：{太平洋，北冰洋，印度洋，大西洋}，{高一的学生}

集合的表示方法如下：

(1) 语言描述法：{不是直角三角形的三角形}；

(2) 列举法：$\{a, b, c, \cdots\}$；

(3) 描述法：将集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法. 如 $\{x \in R \mid x-3>2\}$，$\{x \mid x-3>2\}$.

常用数集：(1) 自然数集：**N**；(2) 整数集：**Z**；(3) 有理数集：**Q**；(4) 实数集：**R.**

2. 集合间的关系与运算

集合包含关系 —— 子集

定义 1.2　若任意 $x \in A$，都有 $x \in B$，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subseteq B$.

$A \subseteq B$ 有两种可能：(1)A 是 B 的一部分，(2)A、B 是同一集合.

若如果 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，那么 $A \subseteq C$.

集合相等

若 A、B 两个集合里面的元素完全一样，则这两个集合相等，记作 $A = B$.

如果 $A \subseteq B$，同时 $B \subseteq A$，那么 $A = B$.

若 $A \subseteq B$，且存在 $x \in B$，但 $x \notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$.

集合的并

设集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，

即 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

则有:$A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$, $A \cup A = A, A \cup \varnothing = A$.

集合的交

设集合 A 和 B,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$.

则有:$(A \cap B) \subset A, (A \cap B) \subset B, (A \cap A) = A, (A \cap \Phi) = \varnothing$.

集合的差

设集合 A 和 B,由属于 A,不属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的差集,记作 $A-B$,

即 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$.

集合的补

设全集 S 中所有不属于 A 的元素构成的集合,称为 A 的补集,记作 $\overline{A}$,

即 $\overline{A} = \{x \mid x \in S$ 且 $x \notin A\}$.

【例 1】 设 $A = \{1,3,5,7\}, B = \{1,5,7,8\}, C = \{3,7,9\}$,

求:$A \cup B, A \cap B, A \cup B \cup C, A - C$.

解 $A \cup B = \{1,3,5,7,8\}$,

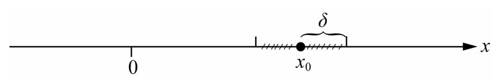
$A \cap B = \{1,5,7\}$,

$A \cup B \cup C = \{1,3,5,7,8,9\}$,

$A - C = \{1,5\}$.

3. 邻域

集合$\{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$是数轴上以 x_0 为心,$\delta(>0)$ 为半径的开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,把它称作 x_0 点的邻域,记为 $U(x_0, \delta)$.



去心邻域:集合 $U^0(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0\} \cup \{x \mid x_0 < x < x_0 + \delta\}$,它是邻域 $U(x_0, \delta)$ 去掉点 x_0 而成的.

例如,$U(2, 0.1) = \{x \mid 2 - 0.1 < x < 2 + 0.1\} = (1.9, 2.1)$,

$U^0(2, 0.1) = \{x \mid 2 - 0.1 < x < 2$ 或 $2 < x < 2 + 0.1\} = (1.9, 2) \cup (2, 2.1)$.

4. 函数的定义

例如:圆的面积 S 和半径 r 之间的关系为:$S = \pi r^2$,显然当 r 确定时,S 也就确定.

这就是说,同一过程中变量之间往往存在着某种确定的关系.它们在遵循某一规律时相互联系、相互约束着.

定义 1.3 设 D 是一个非空的实数集,存在某一对应法则 f,使得对任意的变量 $x \in D$,有唯一确定的实数 y 与之对应,则称对应法则 f 为定义在 D 上的一个函数关系,称变量 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x), x \in D$,数集 D 称为该函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量,称全体 $y = f(x)$ 的值为函数的值域,记作 $G(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

注:(1) 函数通常还可用 $y = g(x), y = F(x), u = \varphi(v)$ 等表示.

(2) 约定:函数的定义域就是自变量所能取的,使算式有意义的一切实数值的全体.

(3) 若对每一个 $x \in D$,只有唯一的一个 y 与之对应,称函数为单值函数.

(4) 若函数 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有相同的定义域和值域,以及相同的对应法则,称两函数相等.

例如,函数 $y = x + 3$ 与 $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$,两函数的定义域不同,函数不相等.

例如,函数 $y = \arccos \dfrac{x-3}{4}$,定义域为 $-1 \leqslant \dfrac{x-3}{4} \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$,

函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} + \sqrt{16 - x^2}$,定义域为

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 16 - x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ 或 } x > 2 \\ -4 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases} \Rightarrow -4 \leqslant x < -2 \text{ 或 } 2 < x \leqslant 4.$$

函数的表示法有三种:解析法、图像法、列表法.其中解析法较普遍,它是借助于数学式子来表示对应法则,上例均为解析法.

隐函数与显函数　若一个函数能表示成形式 $y = f(x)$,称其为显函数,而有些函数的变量 y 与 x 之间的函数关系 F 由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定,则称 $F(x,y) = 0$ 确定一个隐函数.

例如,方程 $e^x y = e^y x^3 + y^2 \ln x$ 确定的变量 y 与 x 之间,但很难把其显式化.

函数的基本性质

(1) 有界性:若对任意的 $x \in D$,总存在一个常数 $M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M$,称函数 $f(x)$ 在区域 D 上是有界函数,否则称函数 $f(x)$ 在区域 D 上是无界函数.

(2) 奇偶性:设函数在区域 D 上有定义,对任意的 $x \in D$ 且 $-x \in D$,若 $f(-x) = f(x)$ 称函数 $f(x)$ 为偶函数,若 $f(-x) = -f(x)$ 称函数 $f(x)$ 奇函数.

(3) 单调性:设函数在区域 D 上有定义,对任意的 $x_1, x_2 \in D$,且 $x_1 < x_2$,若 $f(x_1) < f(x_2)$,称函数 $f(x)$ 在区域 D 上是单调增加,若 $f(x_1) > f(x_2)$,称函数 $f(x)$ 在区域 D 上是单调减少.

单调增加函数和单调减少函数简称为单调函数,相应的区间称为单调区间.

(4) 周期性:若对任意的 $x \in D$,存在一个常数 $T > 0$,使得 $x + T \in D$,且 $f(x + T) = f(x)$,称函数 $f(x)$ 为周期函数,满足上式的最小正数,称为函数的周期.

5. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 是一一对应的单值函数,则 $y = f(x)$ 的反函数存在,且原函数与反函数有相同的单调性.原函数的定义域为反函数的值域,原函数的值域为反函数的定义域.

对函数 $y = f(x)$,如果反函数存在,首先反解出 $x = f^{-1}(y)$,而后再换字母得 $y = f^{-1}(x)$,称为反函数.

例如,正弦函数 $y = \sin x$,先解出 $x = \arcsin y$,再换字母得出 $y = \arcsin x$,称为反正弦函数.

$\sin \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$　　　　　　$\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

$\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$　　　　　　$\arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \qquad \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$$

6. 分段函数

对于定义域内自变量不同的值，其对应规则要用两个或两个以上数学式表达，这类函数称为分段函数.

【例 2】 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \quad \text{定义域}(-\infty,+\infty)$$

图形如图 1-1 所示.

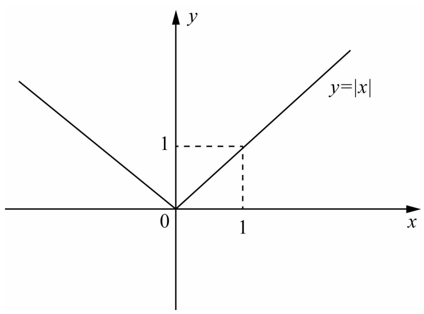


图 1-1

【例 3】 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \quad \text{定义域}(-\infty,+\infty)$$

图形如图 1-2 所示.

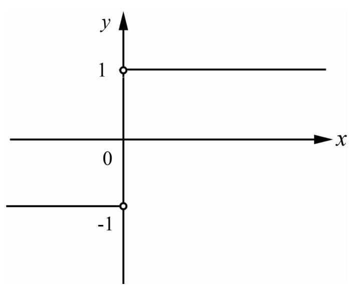


图 1-2

【例 4】 取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数

$$[-3.2]=4$$
$$[0.6]=0$$
$$[-0.6]=-1$$
$$[3.2]=3$$

定义域为$(-\infty,+\infty)$图形如图1-3所示.

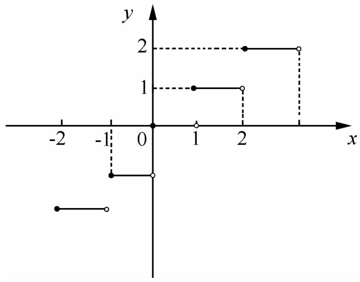


图 1-3

【例 5】 $y=\min\left(\frac{1}{|x|},x^2\right)=\begin{cases} x^2 & -1<x<1 \\ \frac{1}{x} & x\geqslant 1 \\ \frac{-1}{x} & x\leqslant -1 \end{cases}$

定义域为$(-\infty,+\infty)$图形如图1-4所示.

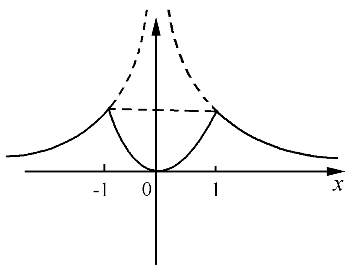


图 1-4

【例 6】 $y=\max(x,x^2)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ x^2 & x>1 \end{cases}$

定义域$(-\infty,+\infty)$图形如图1-5所示.

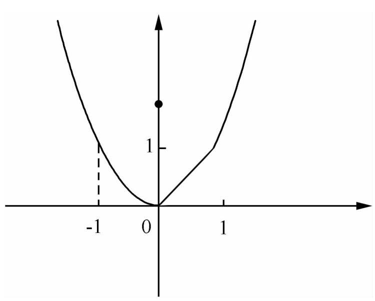


图 1-5

7. 复合函数

设函数$y=f(u)$的定义域为$D(f)$.若函数$u=\varphi(x)$的值域$Z(\varphi)$,$Z(\varphi)\cap D(f)=G$

非空，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数，x 为自变量，y 为因变量，u 称为中间变量.

【例 7】 求 $y=\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$ 定义域.

解 $y=\arcsin u, u=\dfrac{3x-1}{2}$，必须有

$$-1\leqslant\frac{3x-1}{2}\leqslant 1, -2\leqslant 3x-1\leqslant 2, -1\leqslant 3x\leqslant 3, -\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1.$$

定义域为 $\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

【例 8】 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

$$y=\ln u, u=x+\sqrt{v} \quad v=x^2+a^2$$

8. 初等函数和基本初等函数

下面五类函数称为基本初等函数：

幂函数 $y=x^{\mu}$，μ 为常数；

指数函数 $y=a^x$，$(a>0,a\neq 1)$；

对数函数 $y=\log_a x$，$(a>0,a\neq 1)$；

三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x$；

反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

初等函数 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合函数步骤所得可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

今后在一些计算中会遇到由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 运算产生的双曲函数和反双曲函数：

双曲正弦 $\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲余弦 $\operatorname{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，双曲正切 $\operatorname{th}x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$.

9. 多元函数

D 为平面上的点 (x,y) 组成的集合，$D\rightarrow$ 实数集 R 为定义在 D 上的二元函数，记为

$$z=f(x,y) \quad (x,y)\in D$$

其中，点集 D 为定义域，x 与 y 称为自变量(一般是彼此不依赖)z 称为因变量，实数值 z 的全体构成值域 $f(D)$.

【例 9】 $z=\arcsin(x^2+y^2)$，它的几何形象是空间的曲面，定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$.

【例 10】 $z=f(u,v)=u+v$，

f 是二元函数法则，

若 $u=t, v=t^2, z=t+t^2=z(t)$，其中 z 是一元函数法则.

1.2　数列极限

1. 数列极限的定义

定义 2.1　自变量取正整数的函数称为数列，记作 $y_n = f(n)$，y_n 称为通项.

【例 1】　$\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

【例 2】　$1,2,3,\cdots,n,\cdots$

【例 3】　$0,2,0,\cdots,1+(-1)^n,\cdots$

例 1 中 $x_n = \frac{n}{n+1}$，当 n 逐渐增大时，x_n 越来越接近于 1，n 无限增大时，x_n 无限接近于 1，称 x_n 以 1 为极限；例 2 中 $y_n = n$，当 n 无限增大时，y_n 也无限增大；例 3 中 $z_n = 1+(-1)^n$，当 n 越来越大时，z_n 始终在 $0 \sim 2$ 之间跳动.

定义 2.2　若当 n 无限增大时，y_n 无限接近于数 a，则称数列 y_n 以 a 为极限或 y_n 收敛于 a. 若 y_n 不收敛于任何数 a，则称数列 y_n 发散.

下面分析一下"y_n 无限地接近于 a"，其相当于"$|y_n - a|$ 无限地接近于 0"相当于"$|y_n - a|$ 在正数的范围内要多小有多小"相当于"任给正数 ε，$|y_n - a| < \varepsilon$ 总能做到"，但这是有条件的，只要 n 足够大，也就是当 n 大于某个 N 时，$|y_n - a| < \varepsilon$ 总成立.

定义 2.3　若数列 y_n 与数 a 满足：对任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$|y_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称 n 趋于无穷大时，数列 y_n 以 a 为极限. 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

例如，$n \to \infty$ 时，$x_n = \frac{n}{n+1}$ 收敛于 1；$y_n = n$ 无极限，所以 y_n 是发散的；$z_n = 1+(-1)^n$ 在 0 与 2 之间跳跃无极限，因而也是发散的.

【例 4】　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$.

证明　任给正数 ε，要使 $\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$，只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$ 即可. 因此，取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. 则对任给的正数 ε，当 $n > N$ 时，$\left|\frac{n+(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$ 恒成立.

所以　$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n} = 1$.

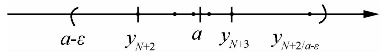
说明：(1) N 是由 ε 决定的，即 $N = N(\varepsilon)$，但 N 不是唯一的，N 取比 $N(\varepsilon)$ 大的正整数如 $N(\varepsilon)+1$，$N(\varepsilon)+2$ 等都是可以的.

(2) 定义 2.3 只能用来证明数 a 是否是数列 y_n 的极限，而不能用来求出数列 y_n 的极限.

$n \to \infty$ 时，y_n 以 a 为极限的几何解释：

对给定的正整数 ε，不论 ε 多么小，总存在正整数 N，从 $N+1$ 项开始，以后的所有的项

$y_{N+1}, y_{N+2}, \cdots$，均落在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内.



2. 数列极限的性质

定理 2.1 收敛数列的极限是唯一的.

证明 （反证法）假设 y_n 有极限 a 和 b，$a \neq b$，不妨设 $a < b$. 则取 $\varepsilon = \dfrac{b-a}{2}$，由 y_n 收敛于 a 和 b，故存在正整数 N_1 和 N_2，使 $n > N_1$ 且 $n > N_2$ 时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad 得 \quad y_n < \frac{a+b}{2}.$$

$$|y_n - b| < \varepsilon, \quad 得 \quad y_n > \frac{a+b}{2}.$$

相互矛盾. 所以 a 和 b 一定相等.

定理 2.2 收敛数列必有界.

证明 设 y_n 收敛于 a. 取 $\varepsilon = 1$，则存在 N，当 $n > N$ 时，有 $|y_n - a| < \varepsilon$. 即

$$a - 1 < y_n < a + 1.$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_N, a+1\}$.

$m = \min\{x_1, x_2, \cdots, x_N, a-1\}$.

则对任意的 n，$m \leqslant y_n \leqslant M$ 恒成立.

故 y_n 是有界的.

说明：定理 2.2 的逆命题不成立，即有界数列不一定收敛.

定理 2.3 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，且 $a < b$，则存在正整数 N，当 $n > N$ 时，$x_n < y_n$ 总成立.

推论：若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，且 $a > 0$，则存在自然数 N，当 $n > N$ 时，$y_n > 0$ 总成立.

定理 2.4 若三个数列 x_n, y_n, z_n 从某项开始，总有

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, n > n_1,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

证明 任给正数 ε，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则存在 N，当 $n > N_1$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$，所以有 $a - \varepsilon < x_n$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则存在 N_2，当 $n > N_2$ 时，有 $|z_n - a| < \varepsilon$，所以有 $z_n < a + \varepsilon$.

取 $N = \max\{n_1, N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < a + \varepsilon.$$

即 $|y_n - a| < \varepsilon$. 故有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

该定理称为夹逼定理，y_n 是要求极限的数列，而 x_n 和 z_n 是 y_n 通过适当缩小与放大而得

到的数列.缩小与放大过程中要保证 x_n 与 z_n 具有相同的极限.

【例 5】 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

解 $\dfrac{n^2}{n^2+n}=n\cdot\dfrac{n}{n^2+n}\leqslant\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)\leqslant n\cdot\dfrac{n}{n^2}=1.$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$.故 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)=1.$

定理 2.5 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n=Aa$. ($A$ 为常数)

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=ab$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{a}{b}$.($b\neq 0$)

证明 (只证(2)).任给正数 ε,由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

存在正整数 N,当 $n>N$ 时,$|x_n-a|<\varepsilon$,则

当 $n>N$ 时,$|Ax_n-Aa|=|A|\cdot|x_n-a|\leqslant|A|\varepsilon$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n=Aa$.

在上面的证明中,最后所得的不等式不是小于任意正数 ε,而是小于 ε 乘一个常数.请思考一下,为什么这样做是合理的.

【例 6】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-4}{2n^2+1}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-4}{2n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}-\dfrac{4}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{3}{2}.$

1.3 函数的极限

如果不考虑数列极限中的 n 是正整数这一特殊性,而只考虑函数 $y=f(x)$ 在自变量 x 的某个变化过程中,对应的函数值 y 是否无限地接近于某个常数 a,这样就引出了函数极限的概念.

1. $x\to x_0$ 时 $y=f(x)$ 的极限

若当 x 无限地接近于某固定点 x_0 时,函数值 $y=f(x)$ 无限地接近于常数 a,则称 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 a 为极限.下面分析上面这句话.$y=f(x)$ 无限地接近于常数 a,指的是 $|f(x)-a|$ 可以任意小.对任给的正数 ε,$|f(x)-a|<\varepsilon$ 总能做到,当然,条件是 x 与 x_0

要足够接近，x 与 x_0 的接近程度可以用正数 δ 来刻划，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 就能成立.

例如，直观上，在 x 无限接近于 3 时，函数 $y=3x-1$ 无限地接近于 8. 事实上，任给正数 ε，$|3x-1-8|=3|x-3|<\varepsilon$ 总能做到，只要 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$，即当 x 与 $x_0=3$ 接近到距离小于 $\frac{\varepsilon}{3}$ 时，$|f(x)-8|<\varepsilon$ 就恒成立.

定义 3.1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，若存在数 a，对任给正数 ε，总存在正数 δ，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立. 则称 $y=f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 a 为极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a \quad 或 \quad f(x)\to a(x\to x_0)$$

说明：定义中要求 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域内有定义，即 $f(x)$ 在 x_0 有无极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义无关.

几何解析：对 $\forall\varepsilon>0$，作两条平行直线 $y=a+\varepsilon$，$y=a-\varepsilon$. 由定义，对此 ε，$\exists\delta>0$. 当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，且 $x\neq x_0$ 时，有 $a-\varepsilon<f(x)<a+\varepsilon$. 即函数 $y=f(x)$ 的图形夹在直线 $y=a+\varepsilon$，$y=a-\varepsilon$ 之间（$f(x_0)$ 可能除外）. 换言之：当 $x\in\dot{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\in U(a,\varepsilon)$. 且 δ 不唯一.

【例 1】 证明 $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

证明 对任给的正数 ε，要使 $|3x-1-8|=3|x-3|<\varepsilon$.

只需 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{3}$. 故取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，当

$0<|x-3|<\delta$ 时，$|f(x)-8|<\varepsilon$ 恒成立.

按照定义，有 $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)=8$.

【例 2】 证明：当 $x_0>0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证明 对任给的 $\varepsilon>0$，要使

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$ 即可.

故取 $\delta=\sqrt{x_0}\varepsilon$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon \text{ 恒成立.}$$

按照定义有 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

类似可以证明 $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$（$c$ 为常数），$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$.

上述极限概念中 x 既从 x_0 的左侧也从 x_0 的右侧趋于 x_0，但有时 x 从 x_0 的左侧和右侧

趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的极限情况不同. 所以下面引入左极限和右极限的概念.

若 $x < x_0$ 且 $x \to x_0$ 时, $f(x) \to a$ 则称 a 是 $f(x)$ 在 x_0 点的左极限. 记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \quad 或 \quad f(x_0 - 0) = a.$$

若 $x > x_0$ 且 $x \to x_0$ 时, $f(x) \to a$, 则称 a 是 $f(x)$ 在 x_0 点的右极限. 记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a \quad 或 \quad f(x_0 + 0) = a.$$

由上述定义可以看出下述定理.

定理 3.1　函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时有极限的充要条件是左极限与右极限都存在且相等. 即

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

【例 3】　证明:函数(见图 1-6)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

当 $x \to 0$ 时, $f(x)$ 的极限不存在.

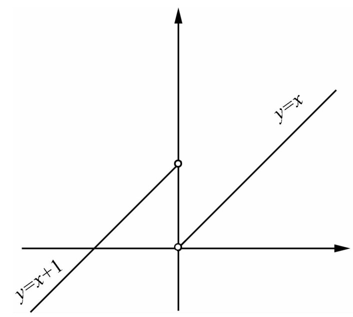


图 1-6

证明　可以看出

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0.$$

由于　$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

所以　$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ 不存在.

2. $x \to \infty$ 时函数的极限

若 $x \to \infty$ 时, 函数 $f(x)$ 无限地接近于常数 a, 则称 a 为 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限.

定义 3.2　任给正数 ε, 若存在正整数 M, 当 $|x| > M$ 时, $|f(x) - a| < \varepsilon$ 恒成立. 则称 a 为 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \quad 或 \quad f(x) \to a(x \to \infty).$$

几何意义上 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$ 表示, 作直线 $y = a - \varepsilon$ 和 $y = a + \varepsilon$, 则总有正数 M, 当 $x > M$ 或 $x < -M$ 时, $y = f(x)$ 的图像总落在这两直线之间, 如图 1-7 所示.

【例 4】　证明　$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

证明　任给正数 ε. 要使 $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$, 只要 $|x| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可.

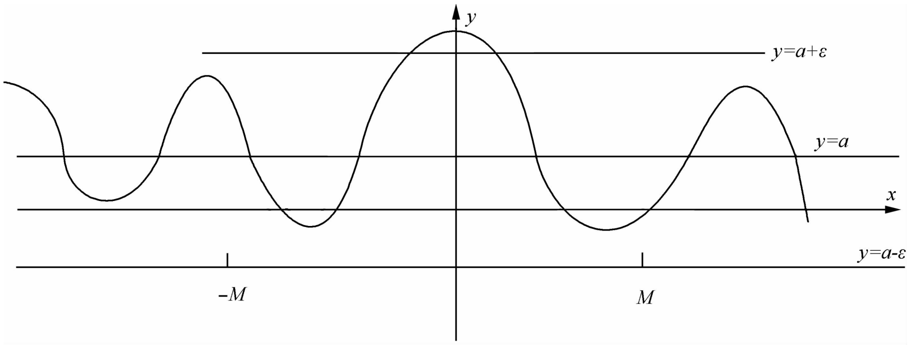


图 1-7

取 $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$,则当 $|x|>M$ 时,

$\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 恒成立.

按照定义 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

类似可以定义 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 时 $f(x)$ 的极限:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=a,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a.$$

定理 3.2 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),则存在 $\delta>0$,使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

证 不妨设 $a>0$,取 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$,由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-a|<\varepsilon$ 但成立.

故 $a-\varepsilon=a-\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}<f(x)$.

则 $f(x)>\dfrac{a}{2}>0$.

定理 3.3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$,且 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$),则 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

说明:定理 3.2 与定理 3.3 互为逆否命题.

1.4 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

定义 4.1 若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时以零为极限,则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时是无穷小量.

说明：$f(x)$ 在 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时是无穷小量，指的是 $|f(x)|$ 在正数范围内要多小有多小.

【例 1】 由于 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，故 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x \to \infty$ 时是无穷小量.

定理 4.1 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，函数 $f(x)$ 以 a 为极限的充要条件是 $f(x) = a + \alpha$，其中 α 在 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时是无穷小量.

证 先证必要性：设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$. 则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - a| < \varepsilon$. 取 $\alpha = f(x) - a$. 则 α 在 $x \to x_0$ 时以零为极限，是无穷小量，而且 $f(x) = a + \alpha$.

再证充分性：设 $f(x) = a + \alpha$，a 为常数，α 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量，即 $f(x) - a$ 是无穷小量. 则任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - a| = |\alpha| < \varepsilon$ 恒成立. 则 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时以 a 为极限.

2. 无穷大量

若 $f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 在 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时要多大有多大，则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时是无穷大量. 下面给出其精确定义.

定义 4.2 若任给正数 M，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x)| > M$ 恒成立. 则称 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是无穷大量.

类似可定义 $f(x)$ 在 $x \to \infty$ 时是无穷大量.

说明：(1) $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，$f(x)$ 是无穷大量，这时 $f(x)$ 是没有极限的. 但为了叙述方便，仍记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad 或 \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

(2) 无穷大量是指绝对值要多大有多大，跟函数值是正是负无关.

(3) 若在定义中，有 $|f(x)| > M$ 换成 $f(x) > M$（或 $f(x) < -M$），就记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad （或 \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty）.$$

【例 2】 证明 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

证 任给 $M > 0$，要使 $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$，只要 $|x| < \dfrac{1}{M}$，取 $\delta = \dfrac{1}{M}$，则当 $0 < |x - 0| < \delta$ 时，$\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$ 恒成立，按照定义有 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$.

定理 4.2 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，(1) 若 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；(2) 若 $f(x)$ 是无穷小量，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

3. 无穷小量的比较

设 $u(x)$，$v(x)$ 在 $x \to x_0$ 时都是无穷小量. 为了比较两者趋于零的速度，我们讨论 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 的极限.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = 0$，则表示 $x \to x_0$ 时，$u(x)$ 趋于零的速度比 $v(x)$ 快，而且快得多. 此时，称当 $x \to x_0$ 时，$u(x)$ 是比 $v(x)$ 高阶的无穷小量(或 $v(x)$ 是比 $u(x)$ 低阶的无穷小量)记为 $u(x) = o(v(x)) \quad (x \to x_0)$。

例如，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$，

则 $x \to 0$ 时，x^2 是比 x 高阶的无穷小量. $x^2 = o(x)(x \to 0)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = c$($c$ 是不为零的常数)，则称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是同阶无穷小量. 特别地，若 $c = 1$，则称 $u(x)$ 与 $v(x)$ 是等价无穷小量，记为 $u(x) \sim v(x) \quad (x \to x_0)$.

例如，$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x \to 0}(x + 1) = 1$，

则$(x^2 + x)$ 与 x 是等价无穷小量. $(x^2 + x) \sim x(x \to 0)$.

常用的等价无穷小量　当 $x \to 0$ 时，等价无穷小有：

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

注：用等价无穷小代换适用于乘、除，对于加、减应谨慎.

【例 3】　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，

所以 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

【例 4】　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x^2 + 2x}$.

解　因为当 $x \to 0$ 时，$\arcsin 2x \sim 2x$，

所以　原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x^2 + 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x + 2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

1.5　函数极限运算法则

定理 5.1　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$，则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha a + \beta b$($\alpha$、$\beta$ 为常数)；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = ab$;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

证明省略.

说明: 定理 1.5.1 中的 $x \to x_0$ 改为 $x \to x_0^+$, $x \to x_0^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, 结果仍然成立.

推论 1　有限个无穷小量的和是无穷小量.

证　考虑两个无穷小量.

设 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

即　$\lim\limits_{x \to x_0}u(x) = \lim\limits_{x \to x_0}v(x) = 0$, 则

$$\lim_{x \to x_0}(u(x) + v(x)) = \lim_{x \to x_0}u(x) + \lim_{x \to x_0}v(x) = 0.$$

即　$u(x) + v(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是无穷小量.

推论 2　常量和无穷小量的乘积仍是无穷小量.

推论 3　有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

定理 5.2　有界函数与无穷小量的乘积是无穷小量.

证　设 $f(x)$ 是有界函数, $g(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是无穷小量. 则存在正整数 M, 有 $|f(x)| < M$ 恒成立. 任给正数 ε, 存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ 恒成立.

故　$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

按照极限的定义

$\lim\limits_{x \to x_0}f(x)g(x) = 0$, $f(x)g(x)$ 在 $x \to x_0$ 时是无穷小量.

例如 $\lim\limits_{x \to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$,

由于 $x \to 0$ 时, x 是无穷小量, $\sin\dfrac{1}{x}$ 是有界变量, 故 $x\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 时是无穷小量, 即 $\lim\limits_{x \to 0}x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

【例 1】

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2}(4x^2 - 3x + 2) &= 4(\lim_{x \to 2}x)^2 - 3(\lim_{x \to 2}x) + \lim_{x \to 2}2 \\ &= 4 \times 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 12.\end{aligned}$$

说明: 多项式函数 $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n (a_n \neq 0)$

在 $x \to x_0$ 时的极限为 $P_n(x_0)$, 即

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0}P_n(x) &= \lim_{x \to x_0}(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \\ &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = P_n(x_0).\end{aligned}$$

【例 2】　$\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2 - 4}{x + 3}$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x+3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}=\dfrac{2^2-4}{2+3}=0.$

【例 3】 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2-4}.$

解 由例 2 的结果可知$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{x^2-4}=\infty.$

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}$

$$=\lim_{x\to 4}(\sqrt{x}+2)=\sqrt{4}+2=4.$$

说明: 有理分式$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m}$的极限有如下可能:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{P_n(x_0)}{Q_m(x_0)} & Q_m(x_0)\neq 0\\ \infty & Q_m(x_0)=0,P_n(x_0)\neq 0\\ \text{先约分,转为上面两种情况} & Q_m(x_0)=P_n(x_0)=0\end{cases}$$

【例 5】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{4n^2+4}.$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n+1}{4n^2+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{4+\dfrac{4}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\dfrac{4}{n^2}\right)}=\dfrac{3}{4}.$

【例 6】 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{4x^3+x+1}.$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{4x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{4+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{0}{4}=0.$

【例 7】 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4x^3+x+1}{3x^2+1}.$

解 由例 6 的结果可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+x+1}{3x^2+1}=\infty.$$

说明: 有理分式$\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$在 $x\to\infty$ 时的极限有如下规律.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_n} & (n=m)\\ 0 & (n<m)\\ \infty & (n>m)\end{cases}$$

【例 8】　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ \dfrac{x^2-1}{x^3+1} & x\geqslant 0\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)$.

解　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-1)=-1$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-1}{x^3+1}=-1$.

所以　$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2-1}{x^3+1}=0$.

$\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(x^2-1)=+\infty$.

1.6　两个重要极限

本节介绍两个重要极限且附带两个极限存在的准则.

准则Ⅰ　若在 x_0 的某去心邻域内，函数 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$ 总有 $u(x)\leqslant v(x)\leqslant w(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}w(x)=a$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=a$.

证　由　$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=\lim\limits_{x\to x_0}w(x)=a$.

任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，

$$|u(x)-a|<\varepsilon,\ |w(x)-a|<\varepsilon.$$

即　$a-\varepsilon<u(x)<a+\varepsilon$，$a-\varepsilon<w(x)<a+\varepsilon$.

又因为　$u(x)\leqslant v(x)\leqslant w(x)$，

所以　$a-\varepsilon<v(x)<a+\varepsilon$，

即　$|v(x)-a|<\varepsilon$.

按照极限的定义，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=a$.

说明：准则Ⅰ又称为夹逼定理，当中的 $x\to x_0$ 改为 $x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$ 时同样成立，对数列极限也同样适用.

【例 1】　证明　$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

证　当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时　$-|x|\leqslant\sin x\leqslant|x|$.

而 $\lim\limits_{x\to 0}-|x|=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$，再根据准则Ⅰ得

$$\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

【例 2】　证明　$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证　$0\leqslant 1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}x^2$.

由$\lim\limits_{x\to 0}0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}x^2=0$. 再根据准则 Ⅰ 得

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=0,\quad 即\quad \lim_{x\to 0}\cos x=1.$$

准则 Ⅱ 若数列 $y_n=f(n)$ 是单调有界的，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$一定存在.

对准则 Ⅱ，我们不作证明.

下面介绍两个重要极限

(ⅰ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

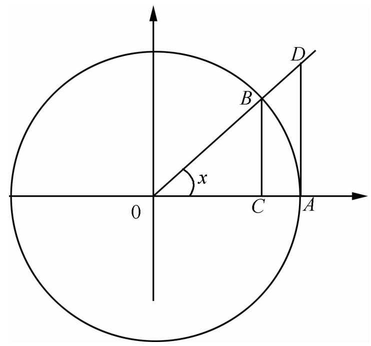


图 1-8

注意到$\dfrac{\sin x}{x}$对 $x\neq 0$ 都有定义，

且$\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{-\sin x}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$,

所以，我们只考虑 x 由 x 的右方趋于 0 的情形即可.

作单位圆，如图 1-8 所示.

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

由于 $\triangle AOB$ 的面积 < 扇形 AOB 的面积 < $\triangle AOD$ 的面积，

所以 $\dfrac{1}{2}\sin x<\dfrac{1}{2}x<\dfrac{1}{2}\tan x$.

即 $\sin x<x<\tan x$.

不等式三边各除以 $\sin x$，则有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

即 $0<|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\lim\limits_{x\to 0}1=1$.

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

【例 4】 求$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arctan t}{t}$.

解　令 $x = \arctan t$，则 $t = \tan x$，　$t \to 0$ 时，有 $x \to 0$，于是

$$\lim_{t\to 0}\frac{\arctan t}{t} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot \cos x$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot \lim_{x\to 0}\cos x = 1\cdot 1 = 1.$$

（ⅱ）第二个重要极限.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

其中 $\mathrm{e} = 2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\cdots$ 是个无理数.

受该极限证明难度和篇幅所限，这里不介绍其证明，但是其证明的思想是通过证明数列 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ 是一个单调递增并且有界的数列证明的.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e}$ 是该极限的数列形式.

利用换元的思想，令 $\frac{1}{x} = \alpha$，则 $x \to \infty$ 时，$\alpha \to 0$.

$\left(1+\frac{1}{x}\right) = (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$，则第二个重要极限又可以记为 $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e}$.

【例 5】　求　$\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}}$.

解　令 $\alpha = -t$，则 $t \to 0$ 时，$\alpha \to 0$.

于是　$\lim\limits_{t\to 0}(1-t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}]^{-1} = [\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{2}}]^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$.

【例 6】　求　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x}$.

解

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x-1}{x}\right)^{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$= \mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{-1} = 1$$

1.7　函数的连续性

函数连续与否的概念源于函数图像的直观分析. 例如，$y = f(x) = x$ 的图像是一条直线，其曲线可以“一笔画成”. 而分段函数 $y = f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 的图像则至少需要两笔才可画成.

为了介绍连续的概念，下面先引入增量的定义.

变量 t 从它的初值 t_1 改变到终值 t_2，终值与初值之差 $t_2 - t_1$ 称为 t 的改变量或增量，记作 Δt. 即

$$\Delta t = t_2 - t_1.$$

说明:增量 Δt 可以是正的,也可以是负的.

对函数 $y = f(x)$ 来说,有两个变量:自变量 x 和因变量 y. 若让自变量 x 从初值 x_0 发生 Δx 的增量时,对应的函数值的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 可以按下面的方式定义函数的连续性.

定义 7.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta t \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$,则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

【例 1】 证明函数 $y = x^2$ 在给定点 x_0 连续.

证 当 x 从 x_0 处产生 Δx 的增量时,函数的增量

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 0.$

按照定义 $y = x^2$ 在 x_0 连续.

【例 2】 证明 $y = \sin x$ 在给定点 x_0 连续.

证 $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)\sin \dfrac{\Delta x}{2}.$

由于 $2\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right)$ 是有界函数,$\sin \dfrac{\Delta x}{2}$ 在 $\Delta x \to 0$ 时是无穷小量,所以

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin \frac{\Delta x}{2} = 0.$$

按照定义 $y = \sin x$ 在点 x_0 连续.

下面介绍函数连续的另一种定义.

设 $x = x_0 + \Delta x$,则 $\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$,

又由于
$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] &= \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0).\end{aligned}$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ 就是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

定义 7.2 设 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续.

下面说明左连续和右连续:

若 $f(x_0 + 0) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

若 $f(x_0 - 0) = f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续.

若函数 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内任意点连续,则称 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内连续. 若 $y = f(x)$ 在 (a,b) 内连续,且在点 a 右连续,在点 b 左连续,则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

由前面的知识容易得到. 若 $f(x)$ 是多项式函数,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是连续的.

若 $f(x)$ 是有理分式,则 $f(x)$ 在其定义域内是连续的.

【例 3】 证明 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

证　由例2中 $y=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内任意点 x_0 连续，故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

类似可得　$y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

由函数连续的定义，复合函数有如下求极限法则.

若 $y=f(u)$ 在点 x_0 连续，而 $u=u(x)$ 在 $x\to x_0$ 时以 u_0 为极限，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[u(x)] \xlongequal[\text{则 } u\to u_0]{\text{令 } u=u(x)} \lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)=f[\lim_{x\to x_0} u(x)].$$

例如　$\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}} \sin\dfrac{1}{x}=\sin\lim\limits_{x\to\frac{2}{\pi}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\sin\dfrac{\pi}{2}=1.$

定义 7.3　若 $y=f(x)$ 在点 x_0 不满足连续条件，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 不连续或者称 $f(x)$ 在点 x_0 间断. 点 x_0 称为 $y=f(x)$ 的间断点. $y=f(x)$ 在点 x_0 间断有下列情形：

(1) $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $f(x)$ 在点 x_0 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

【例 4】　函数 $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 在 $x=2$ 没有定义，所以 $x=2$ 是 y 的间断点.

【例 5】　讨论函数 $y=\begin{cases} 0 & 0<1 \\ 2x+1 & 1\leqslant x<2 \\ 1+x^2 & x\geqslant 2 \end{cases}$

在 $x=1$ 与 $x=2$ 处的连续性.

解　$f(x)$ 在 $x=1$ 与 $x=2$ 处均有定义，且 $f(1)=3$，$f(2)=5$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 0=0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(2x+1)=3\neq\lim_{x\to 1^-} f(x).$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在，所以 y 在 $x=1$ 处间断.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x+1)=5.$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(1+x^2)=5.$$

所以　$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5=f(2)$.

故　$y=f(x)$ 在点 $x=2$ 连续.

定理 7.1　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 也连续.

证　只证 $f(x)\cdot g(x)$ 的情形：由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 连续，所以

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，　$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$. 根据极限的四则运算，有

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=f(x_0)g(x_0),$$

所以 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 连续.

可以证明:基本初等函数在定义域内都是连续的,初等函数在有定义的区间内也都是连续的.

【例 6】 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(1+x)}=\dfrac{e^6\cos 0}{\arcsin 1}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$.

【例 7】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$.

1.8 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有很多开区间上的连续函数不一定有的性质.下面一一介绍.

定理 8.1 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

定理 8.2 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

定理 8.3 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,m 和 M 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值.则对任意的 c,$a<c<b$,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=c$.

推论 若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

例如,在图 1-9 中,函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(a)\cdot f(b)<0$,

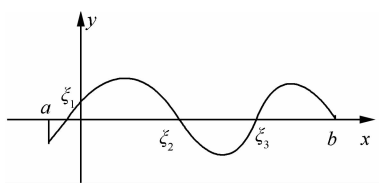


图 1-9

在 x 轴上有三点 ξ_1,ξ_2,ξ_3 使

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=f(\xi_3)=0.$$

【例 1】 证明方程 $x^3-3x=1$ 至少有一根介于 $1\sim 2$ 之间.

证 令 $y=f(x)=x^3-3x-1$,

则 y 在 $[1,2]$ 上连续,且

$$f(1)=-3,f(2)=1,f(1)f(2)<0,$$

所以存在 $\xi \in (1,2)$，使 $f(\xi)=0$，即 $\xi^2-3\xi-1=0$.

$\xi^3-3\xi=1$，ξ 是 $x^3-3x=1$ 的介于 $1\sim 2$ 之间的根.

1.9　综合训练

【例 1】　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（重要极限）.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$（$|\sin x|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$）.

$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$（$\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，$\lim\limits_{x\to 0}x=0$）.

$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$（$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}\xlongequal{\text{令}\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$）.

【例 2】　求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^2-1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{(x-1)(x+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\sin(x^2-1)}{x^2-1}\\&=\lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim_{x^2-1\to 0}\frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}\\&=2\end{aligned}$$

等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 称 $\boxed{\sin x\sim x}$（等价）

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\dfrac{x}{n}}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^n-1}{\dfrac{1}{n}\cdot x\left[(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1\right]}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{n}{(1+x)^{\frac{n-1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{1}{n}}+1}=1\end{aligned}$$

$\therefore\ \boxed{\sqrt[n]{1+x}-1\sim x}$

还有 $\boxed{\tan x\sim x}$，$\boxed{\arcsin x\sim x}$，$\boxed{1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}}$.

证：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=1$

还有$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$，$\boxed{e^x-1\sim x}$，$\boxed{a^x-1\sim x\ln a}$.

证：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\cdot\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\xlongequal[x=\log_a(1+t)=\frac{\ln(1+t)}{\ln a}]{\text{令 } a^x-1=t}\dfrac{1}{\ln a}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)/\ln a}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

【例 3】 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{3}}{-\frac{x^2}{2}}=-\dfrac{2}{3}$.

【例 4】 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+\cos x-1]}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

【例 5】 当 $x\to 1$ 时 $\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 是 $x-1$ 的多少阶无穷小？

解 $\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x=\sqrt{(3x+1)(x-1)}\ln(1+x-1)$

$$=\sqrt{(3x+1)}(x-1)^{\frac{1}{2}}\ln[1+(x-1)].$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(3x+1)}(x-1)^{\frac{1}{2}}\ln[1+(x-1)]}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{3x+1}=2.$$

$\sqrt{3x^2-2x-1}\cdot\ln x$ 是$(x-1)$ 当 $x\to 1$ 时的$\dfrac{3}{2}$ 阶无穷小.

【例 6】 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 0}(e^{3x}-1)=0$. 知$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1)=0$.

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$.

$$2=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}f(x).$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

【例 7】 求数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n(a>0,b>0)$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a-1+b^{\frac{1}{x}}}{a}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x\left(1+\frac{b^{\frac{1}{x}}-1}{a}\right)}$,

而 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{b^{\frac{1}{x}}-1}{a}\right)=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{b^t-1}{a}\right)}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\dfrac{b^t-1}{a}}{t}$

$$=\frac{1}{a}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{t\ln b}-1}{t}=\frac{1}{a}\lim_{t\to0^+}\frac{t\ln b}{t}=\frac{\ln b}{a}.$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n=e^{\frac{\ln b}{a}}=(e^{\ln b})^{\frac{1}{a}}=\sqrt[a]{b}.$

【例 8】　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right].$

解　$(n^{k+1}+1)^{\frac{k}{k+1}}=(n^{k+1}+1)^{1-\frac{1}{k+1}}=\dfrac{n^{n+k}+1}{(n^{k+1}+1)^{\frac{1}{k+1}}}<\dfrac{n^{k+1}+1}{n}$

$$=n^k+\frac{1}{n}<n^k+1.$$

即　$(n^{k+1}+1)^{\frac{1}{k+1}}<(n^k+1)^{\frac{1}{k}}$,

$$\frac{1}{n+1}<\cdots<\frac{1}{(n^k+1)^{\frac{1}{k}}}<\frac{1}{(n^{k+1}+1)^{\frac{1}{k+1}}}<\cdots<\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

$$(1<k<k+1<\cdots<1)$$

$$\frac{n}{n+1}<\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]<\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^n)^{\frac{1}{n}}}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^n}{n^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n^2+1)^{\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{1}{(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]=1.$

【例 9】　设 $x_n=(1+a)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$ 其中 $|a|<1$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$\because x_n=\dfrac{1}{1-a}(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$

$$=\frac{1}{1-a}(1-a^2)(1+a^2)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{1}{1-a}(1-a^4)(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})$$

$$=\frac{(1-a^{2^{n+1}})}{1-a}.$$

由 $|a|<1,\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0,\therefore \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}.$

【例 10】　求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}.$

解　$\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x e^{-1}\right]^x=e^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)-1\right]}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}}.$$

注：$x\to\infty$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}+0\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$也就是当 $t\to 0$ 时 $\ln(1+t)-t\sim\dfrac{-t^2}{2}$.

习　题　一

(A)

1.求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{4-x^2}$；　(2)$y=\dfrac{\ln(4-x)}{\sqrt{|x|-2}}$；　(3)$y=\log_a\arcsin x$；

(4)$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}+\log_a(2x-3)$；　(5)$y=\sqrt{1-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$.

2.求下列函数的反函数及其定义域.

(1)$y=\dfrac{x-3}{x+3}$；　(2)$y=1+\ln(x+2)$；　(3)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$；

(4)$y=2\sin\dfrac{x}{3}, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3.将下列复合函分解成若干个基本初等函数.

(1)$y=\ln\ln\ln x$；　(2)$y=\arcsin\sqrt{1-e^x}$；　(3)$y=(3+2\ln x)^2$；

(4)$y=\sqrt[3]{\log_a\cos^2 x}$.

4.求下列函数的解析式.

(1)设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

(2)设 $f(x)=1-x^2, g(x)=\cos x$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

5.用数列极限定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{3^n}\right)=3$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-5}=\dfrac{2}{3}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=0$.

6.用函数极限定义证明下列极限.

(1)$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x+3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$；　(2)$\lim\limits_{x\to3}(x^2-8)=1$；　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x}=1$.

7.求下列数列极限.

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+100}{5n-4}$；　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{4n^2-4n}$；　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n^2+20n+100}{n^3-1}$；

(4)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$；　(5)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)$；

(6)$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)$；　(7)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+k\sqrt{n}}-\sqrt{n-k\sqrt{n}}}(k\neq0)$；

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$；　　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{5^n}}$.

8. 用极限的定义说明下列极限不存在.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{|x-3|}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$.

9. 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x+1)$；

(4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+6}{x-2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2+2x+1}$　；(6) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{(x+\varepsilon)^2-x^2}{\varepsilon}$；

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$；　(9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$；

(10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x}-1}$；　(11) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$；　(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{n-x-x^2-\cdots-x^n}{1-x}$.

10. 求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$，$(a_0,b_0\neq 0)$；　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$.

11. 求下列极限式中的参变量的值.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2-bx+6}{2x-3}=3$，求 a,b 的值.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=-5$，求 a,b 的值.

(3) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2ax^2-bx+c}{3x-1}=1$，求 a,b,c 的值.

12. 证明：当 $x\to 0$ 时，有：(1) $\arcsin x\sim x$；(2) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；(3) $\tan x\sim x$.

13. 利用等价无穷小的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\tan 5x}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec x}{2+x^2}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{\tan x-\sin x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x\sin}}{1-\cos x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}\left(\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

14. 利用重要极限的性质，求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos 2x}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{\sin x+x}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x-\sin 2x}{3x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x-3}$；　(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-k}{x+k}\right)^{x}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-2x)^{1/x}$.

15.讨论下列函数的连续性.

(1) $f(x)=\begin{cases}-x & x<-1\\ x^2 & -1\leqslant x<1\\ 2x-1 & x\geqslant 1\end{cases}$

(2)若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x} & x<0\\ a & x=0\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x} & x>1\end{cases}$，在 $x=0$ 处连续，则 a 为何值.

(3) a 为何值时函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & (0\leqslant x\leqslant 1)\\ a+x & (1<x\leqslant 2)\end{cases}$ 在 $[0,2]$ 上连续.

16.证明方程 $x^5-5x^3+2=0$ 在区间 $(0,1)$ 上至少有一个根.

17.证明曲线 $y=x^3-2x^2+5x-2$ 在 $x=0$ 与 $x=3$ 之间至少与 x 轴有一交点.

(B)

1.函数 $y=\dfrac{\arccos\lg(3-x)}{\sqrt{28-3x-x^2}}$ 的定义域为(　　)

A. $[-7,3)$　B. $(-7,3)$　C. $(-7,2.9]$　D. $(-7,2.9)$

2.若 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数，则关系式(　　)成立

A. $x=f^{-1}(f(x))$　B. $y=f^{-1}(f(x))$

C. $x=f(f^{-1}(y))$　D.以上都不对

3.设 n 是整数，则 $f(x)=x^n-x^{-n}$ 是(　　)

A.偶函数　B.既是奇函数又是偶函数

C.奇函数　D.非奇非偶函数

4.极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+n^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n+n^2}}\right)$ 等于(　　)

A. 0　B. 1　C. e　D. ∞

5.极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$(　　)

A.等于0　B.等于 ∞　C.等于1　D.不存在

6.当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的(　　)

A.低阶无穷小　B.高阶无穷小

C. 等价无穷小　　　　D. 同阶但非等价的无穷小

7. 极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left([x] + \dfrac{\pi}{x}\right)\pi =$（　　）

A. 不存在　　B. 0　　C. 1　　D. π

8. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则下列极限一定存在的是（　　）

A. $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x)]^{\alpha}$（$\alpha$ 为实数）　　B. $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|$

C. $\lim\limits_{x \to x_0} \ln f(x)$；　　D. $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin f(x)$

9. 设 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a \cdot \mathrm{tg}x + b(1 - \cos x)}{c\ln(1 - 2x) + d(1 - \mathrm{e}^{-x^2})} = 2$，其中 $a^2 + c^2 \neq 0$，则必有（　　）

A. $b = 4d$　　B. $b = -4d$　　C. $a = 4c$　　D. $a = -4c$

10. 设有 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)]$ 和 $f[\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)]$，则（　　）

A. 两个极限不相等　　B. 两个极限不同时存在

C. 两个极限相等　　D. 两极限是否存在不一定

11. 设 $\alpha(x) = o(x^n)$，$\beta(x) = o(x^m)$，则 $\alpha(x)/\beta(x) =$（　　）

A. 1　　B. $o(X)$　　C. ∞　　D. 不定

12. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，则（　　）

A. $\exists M > 0$ 及 x_0 之去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$，使当 $x \in N^*$ 时，$f(x) < M$

B. $\exists M > 0$ 及 x_0 之去心邻域 $N^*(x_0, \delta)$，使当 $x \in N^*$ 时，$|f(x)| < M$

C. $\exists M > 0$ 及 x_0 之邻域 $N(x_0, \delta)$，使当 $x \in N$ 时，$|f(x)| < M$

D. $\exists M > 0$，$|f(x)| < M$

13. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq 0$，则 $\exists \delta > 0$，使（　　）

A. 当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) \neq 0$

B. $f(x_0) \neq 0$

C. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，$f(x) \neq 0$

D. $f(x)$ 在 x_0 处没定义

14. 若 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + a}{x - a}\right)^x = 9$，则常数 a 为（　　）

A. 3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\ln 3$　　D. $\ln 3$

15. 极限 $\lim\limits_{n \to \infty} (\sin\pi\sqrt{n^2 + n})^2$ 为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 不存在　　D. ∞

16. 极限 $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$（　　）

A. 为 e　　B. 为 e^{-1}　　C. 为 1　　D. 为 ∞

17. 设 $x > 0$，则极限 $\lim\limits_{n \to \infty} n^2(\sqrt[n-1]{x} - \sqrt[n]{x})$（　　）

A. 不存在　　B. 为 $-\ln x$　　C. 为 $\ln x$　　D. 为$\dfrac{1}{x}$

18. 设 $f(x)$,$g(x)$ 定义在$(-1,1)$,且都在 $x=0$ 处连续,若(　　)

$$f(x)=\begin{cases} g(x)/x & x\neq 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$$

则

A. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=0$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=1$

C. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$ 且 $g'(0)=0$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 且 $g'(0)=2$

19. 设当 $x\to 0$ 时 $e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量,则(　　)

A. $a=\dfrac{1}{2},b=1$　　B. $a=1,b=1$

C. $a=-\dfrac{1}{2},b=1$　　D. $a=-1,b=1$

20. 设在$(-\infty,+\infty)$内 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 有定义,$f(x)$ 连续,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$ 有间断点,则(　　)

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点