第 1 章　行列式

行列式的理论是人们从解线性方程组的需要中建立和发展起来的，它在线性代数及其他数学分支上都有着广泛的应用.

本章要点

☆行列式的定义

☆行列式的基本性质

☆行列式的计算方法

☆克莱姆法则

本章难点

☆行列式的性质

☆高阶行列式的计算

☆利用行列式求解线性方程组

1.1　二阶、三阶行列式

微课

二阶行列式

1.1.1　二阶行列式

我们知道，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & \text{①} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & \text{②} \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$为已知量，$b_i(i=1,2)$为常数，可以利用加减消元法求得式(1.1)的解.

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，有

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

这就是一般二元线性方程组的公式解. 但这个公式不容易记忆，应用时不方便，因此，我们引进新的符号来表示式(1.2)这个结果，这就是行列式的起源. 我们称 4 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为**二阶行列式**.它含有两行,两列.横的叫行,纵的叫列.其中,a_{ij}($i=1,2$;$j=1,2$)称为这个行列式的元素,i 代表它所在的行数,我们称为行标;j 代表它所在的列数,我们称为列标.例如,a_{12}表示这一元素处在第1行第2列的位置.

从上式知,二阶行列式是这样两项的代数和:一个是从左上角到右下角的对角线(又叫行列式的主对角线)上两个元素的乘积,取正号;另一个是从右上角到左下角的对角线(又叫次对角线)上两个元素的乘积,取负号.

根据定义,容易得知式(1.2)中的两个分子可分别写成

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

如果记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则当 $D \neq 0$ 时,式(1.1)的解式(1.2)可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

像这样用行列式来表示解,形式简便整齐,便于记忆.

首先,式(1.3)中分母的行列式是从式(1.1)中的系数按其原有的相对位置而排成的.分子中的行列式,x_1 的分子是把系数行列式中的第1列换成式(1.1)的常数项得到的,而 x_2 的分子则是把系数行列式的第2列换成式(1.1)的常数项而得到的.

【例 1.1】 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

解 这时

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times2 - 1\times(-4) = 10$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\times2 - 4\times(-4) = 20$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3\times4 - 1\times2 = 10$$

因此,方程组的解是

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{20}{10} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{10}{10} = 1$$

1.1.2　三阶行列式

对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

做类似的讨论,我们引入三阶行列式的概念.我们称符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

为**三阶行列式**,它有三行三列,是六项的代数和.这六项的和也可用对角线法则来记忆:从左上角到右下角三个元素的乘积取正号,从右上角到左下角三个元素的乘积取负号,如图 1.1 所示.

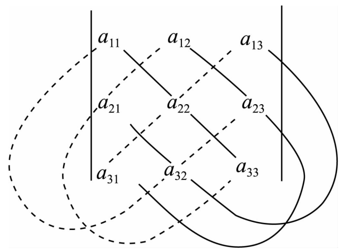

图 1.1

【例 1.2】 计算 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

解 $D=1\times1\times1+0\times4\times2+(-3)\times(-2)\times2-1\times4\times2-0\times(-2)\times1-(-3)\times1\times2=11$

令 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

当 $D\neq0$ 时,式(1.4)的解可简单地表示成

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}$$

它的结构与前面二元一次方程组的解类似.

【例 1.3】 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-x_2=a \\ x_2-x_3=b \\ x_1+x_3=c \end{cases}$$

解 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+1=2\neq0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & -1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}=a+b+c, D_2=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & b & -1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}=b-a+c, D_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & c \end{vmatrix}=c-b-a$$

所以 $x_1=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{1}{2}(-a+b+c)$，$x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{2}(-a-b+c)$.

【例 1.4】 已知

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

问 a，b 应满足什么条件(其中 a，b 均为实数)？

解
$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零. 因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时给定行列式等于零.

为了得到更为一般的线性方程组的求解公式，我们需要引入 n 阶行列式的概念，为此，先介绍排列的有关知识.

1.2 排列与对换

1.2.1 排列

在 n 阶行列式的定义中，要用到排列的某些知识，为此先介绍排列的一些基本知识.

【定义 1.1】 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成一个有序数组称为一个 n 级排列.

例如，1234 是一个 4 级排列，3412 也是一个 4 级排列，而 52341 是一个 5 级排列. 由数码 1、2、3 组成的所有 3 级排列为：123，132，213，231，312，321，共有 $3!=6$ 个.

数字由小到大的 n 级排列 $1234\cdots n$ 称为自然排列.

【定义 1.2】 在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，如果有较大的数 p_t 排在较小的数 p_s 的前面($p_s<p_t$)，则称 p_t 与 p_s 构成一个逆序，一个 n 级排列中逆序的总数，称为这个排列的**逆序数**，记作 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

计算排列的逆序数的方法

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数的任一排列，并规定由小到大为标准次序.

先看有多少个比 p_1 大的数排在 p_1 前面，记为 t_1；

再看有多少个比 p_2 大的数排在 p_2 前面，记为 t_2；

……

最后看有多少个比 p_n 大的数排在 p_n 前面，记为 t_n；

则此排列的逆序数为 $\tau=t_1+t_2+\cdots+t_n$.

容易看出，自然排列的逆序数为 0.

【例 1.5】 求下列排列的逆序数.

(1)6372451；

(2)$135\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解 (1)$\tau=t_1+t_2+\cdots+t_7=0+1+0+3+2+2+6=14$.

(2)前 n 个元素：$1,3,5,\cdots,(2n-1)$不构成逆序；2 前面有 $n-1$ 个数比它大，故有 $n-1$ 个逆序；4 前面有 $n-2$ 个数比它大，故有 $n-2$ 个逆序……依次下去，$2n$ 前面没有数比它大，故没有逆序. 将所有元素的逆序相加，得逆序数：$1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

【定义 1.3】 如果排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 $N(p_1p_2\cdots p_n)$是奇数，则称此排列为**奇排列**，逆序数是偶数的排列称为**偶排列**.

例如，排列 3412 是偶排列，排列 52341 是奇排列，自然排列 $123\cdots n$ 是偶排列.

1.2.1 对换

【定义 1.4】 在一个 n 级排列 $p_1\cdots p_s\cdots p_t\cdots p_n$ 中，如果其中某两个数 p_s 与 p_t 对调位置，其余各数位置不变，就得到另一个新的 n 级排列 $p_1\cdots p_t\cdots p_s\cdots p_n$，这样的变换称为一个

对换,记作(p_s,p_t).

例如,在排列 3412 中,将 4 与 2 对换,得到新的排列 3214.并且我们看到:偶排列 3412 经过 4 与 2 的对换后,变成了奇排列 3214.反之,也可以说奇排列 3214 经过 2 与 4 的对换后,变成了偶排列 3412.

一般地,有以下定理.

【定理 1.1】 任一排列经过一次对换后,其奇偶性改变.

证明 首先讨论对换相邻两个数的情况,该排列为

$$a_1a_2\cdots a_l ijb_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n$$

将相邻两个数 i 与 j 作一次对换,则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_l jib_1b_2\cdots b_mc_1c_2\cdots c_n$$

显然对数 $a_1,a_2,\cdots,a_1,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 和 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 来说,并不改变它们的逆序数.但当 $i<j$ 时,经过 i 与 j 的对换后,排列的逆序数增加 1 个;当 $i>j$ 时,经过 i 与 j 的对换后,排列的逆序数减少 1 个.所以对换相邻两数后,排列改变了奇偶性.

再讨论一般情况,设排列为

$$a_1a_2\cdots a_li\ b_1b_2\cdots b_mjc_1c_2\cdots c_n$$

将 i 与 j 作一次对换,则排列变为

$$a_1a_2\cdots a_lj\ b_1b_2\cdots b_mi\ c_1\ c_2\cdots c_n$$

这就是对换不相邻的两个数的情况.但它可以看成是先将 i 与 b_1 对换,再与 b_2 对换……最后与 b_m 的对换,即 i 与它后面的数作 m 次相邻两数的对换变成排列

$$a_1a_2\cdots a_lb_1b_2\cdots b_mi\ j\ c_1\cdots c_n$$

然后将数 j 与它前面的数 $i,b_m,\cdots,b_1$ 作 $m+1$ 次相邻两数的对换.而对换不相邻的数 i 与 j(中间有 m 个数),相当于作 $2m+1$ 次相邻两数的对换.由前面的证明知,排列的奇偶性改变了 $2m+1$ 次,而 $2m+1$ 为奇数,因此,不相邻的两数 i,j 经过对换后的排列与原排列的奇偶性不同.

【定理 1.2】 任一 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 都可通过一系列对换与 n 级自然序排列 $12\cdots n$ 互变,且所作对换的次数与这个 n 级排列有相同的奇偶性.

证明 对排列的级数用数学归纳法证之.

对于 2 级排列,结论显然成立.

假设对 $n-1$ 级排列,结论成立,现在证明对于 n 级排列,结论也成立.

若 $i_n=n$,则根据归纳假设 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是 $n-1$ 级排列,可经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$,于是这一系列对换就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成 $12\cdots n$.若 $i_n\neq n$,则先施行 i_n 与 n 的对换,使之变成 $i_1i_2\cdots i_{n-1}n$,这就归结成上面的情形.相仿地,$12\cdots n$ 也可经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$,因此结论成立.

因为 $12\cdots n$ 是偶排列,由定理 1.1 可知,当 $i_1i_2\cdots i_n$ 是奇(偶)排列时,必须施行奇(偶)数次对换方能变成偶排列,所以,所施行对换的次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

1.3　n阶行列式

微课

行列式的定义

本节我们从观察二阶、三阶行列式的特征入手，引出 n 阶行列式的定义.

已知二阶与三阶行列式分别为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们可以从中发现以下规律：

(1)二阶行列式是 2！项的代数和，三阶行列式是 3！项的代数和；

(2)二阶行列式中每一项都是两个元素的乘积，它们分别取自不同的行和不同的列，三阶行列式中的每一项都是三个元素的乘积，它们也是取自不同的行和不同的列；

(3)每一项的符号是：当这一项中元素的行标是按自然序排列时，若元素的列标为偶排列，则取正号；若为奇排列，则取负号.

作为二、三阶行列式的推广我们给出 n 阶行列式的定义.

【定义 1.5】　由排成 n 行 n 列的 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$组成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**. 它是 n！项的代数和，每一项是取自不同行和不同列的 n 个元素的乘积. 各项的符号是：每一项中各元素的行标排成自然序排列，若列标的排列为偶排列，则取正号；若为奇排列，则取负号. 于是得

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.5}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数，$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和.

当 $n=2,3$ 时，这样定义的二阶、三阶行列式与上面 1.1 节中用对角线法则定义的行列式是一致的. 当 $n=1$ 时，一阶行列式为 $|a_{11}| = a_{11}$. 但对角线法则对高阶行列式不适用.

为了熟悉 n 阶行列式的定义，我们来看下面几个问题.

【例 1.6】 在 5 阶行列式中，$a_{12}a_{23}a_{35}a_{41}a_{54}$ 这一项应取什么符号？

解 这一项各元素的行标是按自然顺序排列的，而列标的排列为 23514. 因 $\tau(23514)=4$，故这一项应取正号.

【例 1.7】 写出 4 阶行列式中，带负号且包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解 包含因子 $a_{11}a_{23}$ 项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(13j_3j_4)}a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

按定义，j_3 可取 2 或 4，j_4 可取 4 或 2，因此包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项只能是

$$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} \text{ 或 } a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$$

但因 $\tau(1324)=1$ 为奇数，$\tau(1342)=2$ 为偶数，所以此项只能是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

【例 1.8】 证明上三角行列式(主对角线下侧的元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 由 n 阶行列式的定义知，应有 $n!$ 项，其一般项为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

但由于 D 中有许多元素为零，只需求出上述一切项中不为零的项即可. 在 D 中，第 n 行元素除 a_{nn} 外，其余均为 0. 所以 $j_n=n$；在第 $n-1$ 行中，除 a_{n-1n-1} 和 a_{n-1n} 外，其余元素都是零，因而 j_{n-1} 只取 $n-1,n$ 这两个可能，又由于 a_{nn},a_{n-1n} 位于同一列，而 $j_n=n$. 所以只有 $j_{n-1}=n-1$. 这样逐步往上推，不难看出，在展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 一项不等于零. 而这项的列标所组成的排列的逆序数是 $\tau(12\cdots n)=0$，故取正号. 因此，由行列式的定义有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角形行列式的值等于主对角线上各元素的乘积.

同理可求得下三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特别地，对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

上(下)三角形行列式及对角形行列式的值,均等于主对角线上元素的乘积.

【例 1.9】 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 这个行列式除了 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 这一项外,其余项均为零,现在来看这一项的符号,列标的 n 级排列为 $n(n-1)\cdots 21$, $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$,所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

由行列式的定义,行列式中的每一项都是取自不同的行不同的列的 n 个元素的乘积,所以可得出:若行列式有一行(列)的元素全为 0,则该行列式等于 0.

在 n 阶行列式中,为了决定每一项的正负号,我们把 n 个元素的行标排成自然序排列,即 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$. 事实上,数的乘法是满足交换律的,因而这 n 个元素的次序是可以任意写的,一般地,n 阶行列式的项可以写成

$$a_{i_1p'_1}a_{i_2p'_2}\cdots a_{i_np'_n} \tag{1.6}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$,$p'_1p'_2\cdots p'_n$ 是两个 n 级排列,它的符号由下面的定理来决定.

【定理 1.3】 n 阶行列式的一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(p'_1p'_2\cdots p'_n)}a_{i_1p'_1}a_{i_2p'_2}\cdots a_{i_np'_n} \tag{1.7}$$

其中,$i_1i_2\cdots i_n$,$p'_1p'_2\cdots p'_n$ 都是 n 级排列.

证明 若根据 n 阶行列式的定义来决定(1.6)的符号,就要把这 n 个元素重新排一下,使得它们的行标成自然顺序,也就是排成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.8}$$

现在来证明式(1.5)与式(1.7)是一致的. 我们知道从式(1.6)变到式(1.8)可经过一系列元素的对换来实现. 每作一次对换,元素的行标与列标所组成的排列 $i_1i_2\cdots i_n$,$p'_1p'_2\cdots p'_n$ 就同时作一次对换,也就是 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$ 与 $\tau(p'_1p'_2\cdots p'_n)$ 同时改变奇偶性,因而它的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(p'_1 p'_2 \cdots p'_n)$$

的奇偶性不改变.这就是说,对式(1.6)作一次元素的对换不改变式(1.7)的值,因此在一系列对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(p'_1 p'_2 \cdots p'_n)} a_{i_1 p'_1} a_{i_2 p'_2} \cdots a_{i_n p'_n}=(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1 p_1} a_{2 p_2} \cdots a_{n p_n}$$

这就证明了式(1.5)与式(1.7)是一致的.

同样,由数的乘法的交换律,我们也可以把行列式的一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中元素的列标排成自然顺序 $123\cdots n$,而此时相应的行标的 n 级排列为 $i_1 i_2 \cdots i_n$,则行列式定义又可叙述为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

1.4　行列式的性质

微课

行列式的性质

1.4.1　行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，也是一个很麻烦的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项，计算它就需要做 $n!(n-1)$ 个乘法. 当 n 较大时，$n!$ 是一个相当大的数. 直接从定义来计算几乎是不可能的. 本节将继续讨论行列式的性质，利用其性质来简化行列式的计算.

【定义 1.6】 设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次变为第 $1,2,\cdots,n$ 列，得到的新行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然 $(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1　行列式经转置以后其值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　令 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}b_{i_11}b_{i_22}\cdots b_{i_nn}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

此性质说明在行列式中行与列具有相同的地位，凡是有关行的性质，对于列也同样

成立.

性质 2 交换行列式中任意两行(列)的位置,行列式改变符号.

证明 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n}$$

是由 D 交换 i,j 两行而得,即当 $k\neq i,j$ 时,$b_{kp}=a_{kp}$,当 $k=i,j$ 时,$b_{ip}=a_{jp}$,$b_{jp}=a_{ip}$,所以

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 是标准排列,τ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,设 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1,则有 $(-1)^{\tau}=-(-1)^{\tau_1}$,所以

$$D_1=-\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D$$

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素完全相同,那么该行列式等于零.

如

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ a & b & c \end{vmatrix}=0$$

性质 3 把行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k,等于以数 k 乘以该行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 用数 k 乘行列式 D 的第 i 行中所有元素得到行列式 D_1,则

$$D_1=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n}=k\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=kD$$

由性质 3 可以知道:

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子,可以提到行列式符号外面.

当性质 3 中的 $k=0$ 时,就有下面的推论.

推论 3 如果行列式中有一行(列)全为零,那么该行列式等于零.

由推论 1 与性质 2 可得下面的推论.

推论 4　如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例,那么该行列式等于零.

性质 4　如果行列式的某一行(列)的元素为两组数的和,那么该行列式可以分为两个行列式之和. 而且这两个行列式除这一行(列)以外的其他元素与原行列式的对应元素一样.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　$D = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots (a_{ip_i} + b_{ip_i}) \cdots a_{np_n}$

$$= \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n} + \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

$$= D_1 + D_2$$

性质 5　如果以数 k 乘以行列式中的某一行(列)的所有元素然后加到另一行(列)的对应元素上去,所得行列式的值不变.

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【例 1.10】　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix}$$

解　通过观察,可以发现,行列式的第 2 列与第 3 列对应元素成比例,由推论 4 可知

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

【例 1.11】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&3&4&8\\-1&4&2&5\\6&2&5&4\end{vmatrix}$$

解 通过观察,可以发现,行列式的第二行恰为第一行与第三行之和,所以

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&3&4&8\\-1&4&2&5\\6&2&5&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\0&3&4&8\\0&3&4&8\\6&2&5&4\end{vmatrix}=0$$

1.4.2 “化三角法”

微课

行列式的计算

性质 5 是最为重要的一条性质,它与性质 2 和性质 3 的推论一起常用于计算行列式. 它们是关于行列式的行或列的三种运算性质,这三种运算分别记为:

(1)互换 i,j 两行(列):$r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$;

(2)第 i 行(列)乘以某常数 k:$r_i\times k(c_i\times k)$;

(3)将第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上去:$r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

【例 1.12】 计算 $D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}$.

解 $$D=\begin{vmatrix}3&1&-1&2\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\1&-5&3&-3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_2-r_1\\ r_4+5r_1}]{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&-8&4&-6\\0&2&1&-1\\0&16&-2&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_2\div 2\\ r_2\leftrightarrow r_3}}2\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&-4&2&-3\\0&16&-2&7\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+2r_2}2\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&-10&15\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+\frac{1}{2}r_3]{r_4\div 5}10\begin{vmatrix}1&3&-1&2\\0&2&1&-1\\0&0&4&-5\\0&0&0&1/2\end{vmatrix}=40$$

注 为避免麻烦的分数四则运算,第一步先交换 1、2 两列使得 a_{11} 位置变成 1,这是常用技巧,或交换第 1、4 行也可以计算.

【例 1.13】 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$

注 (1)注意运算中次序有时不能颠倒;还要注意运算 r_i+r_j(加到第 i 行上去)与 r_j+r_i(加到第 j 行上去)的区别.

(2)算法不是唯一的,如也可有解法二:

$D \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-3r_2]{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_4-3r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$

说明 任何一个行列式,都可以用 r_i+kr_j 或 c_i+kc_j 的运算方法把它变为一个上三角行列式或下三角行列式.

1.5 行列式按行(列)展开

行列式的计算在这一章中占有非常重要的地位.我们可以通过行列式的性质,将其划成上(下)三角形行列式后得到它的值;另外,我们通常还有一种非常有用的方法,即利用行列式的展开来计算行列式.

1.5.1 行列式的展开

【定义 1.7】 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的行和列,余下的元素按原来的相对位置不变构成的行列式称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

在 M_{ij} 前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 后,得到 $(-1)^{i+j}M_{ij}$,我们称它为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij}. 即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

【例 1.14】 设

$$D=\begin{vmatrix}4 & 3 & 6\\5 & 2 & 1\\7 & 2 & 8\end{vmatrix}$$

求出元素 a_{21},a_{32} 的余子式和代数余子式.

解 根据定义知,元素 a_{21} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{21}=\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 8\end{vmatrix}=12,A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 6\\2 & 8\end{vmatrix}=-12$$

元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{21}=\begin{vmatrix}4 & 6\\5 & 1\end{vmatrix}=-26,A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\5 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & 6\\5 & 1\end{vmatrix}=26$$

引理 n 阶行列式 D 的第 i 行元素除了 a_{ij} 外,其余元素全为 0,则 $D=a_{ij}A_{ij}$.

证明 先证 $(i,j)=(1,1)$ 的情形,此时

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}A_{11}$$

对于一般情形,此时

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ij} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对 D 作如下调换:将第 i 行依次与第 $i-1$ 行,$i-2$ 行,…,1 行对调,再将第 j 列依次与第 $j-1$ 列,$j-2$ 列,…,1 列对调,得行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{11}=a_{ij}$,

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 D 中元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij},故

$$D=(-1)^{(i-1)+(j-1)}D_1=(-1)^{(i+j)}b_{11}M_{11}=(-1)^{(i+j)}a_{ij}M_{ij}=a_{ij}A_{ij}$$

【定理 1.4】(展开定理) n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)$$

证明 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

利用此定理可以进行降阶运算. 在计算行列式时，直接利用此定理进行行列式展开并不一定能简化运算，但当行列式中某一行或某一列中含有较多零时，运用此定理将会非常简便. 例如：

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5\times5\times\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 550$$

【定理 1.5】 设 $d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 是元素 a_{ij} 的代数余子式，则

(1) $a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d, & 当\ k=i \\ 0, & 当\ k\neq i \end{cases}\quad (i,k=1,2,\cdots,n)$；

(2) $a_{1k}A_{1i}+a_{2k}A_{2i}+\cdots+a_{nk}A_{ni}=\begin{cases} d, & 当\ k=i \\ 0, & 当\ k\neq i \end{cases}\quad (i,k=1,2,\cdots,n)$.

1.5.2 行列式的计算

通过前面知识的学习，对于行列式的计算方法，可以总结为以下几种：

(1) 对二阶、三阶行列式通常应用对角线法直接求值；

(2) 对于高阶行列式可以利用行列式的性质，将其转化为三角形行列式再求其值；

(3) 利用行列式的展开，可以使行列式的阶数降低，从而简化其运算过程，特别是当行列式中的某行(列)中含有较多个零元素时常用此法.

【例 1.15】 求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & x & 0 & 6 \\ 0 & 3 & x^2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x^3 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{5}r_1} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[(-1)r_1+r_4]{\substack{(-1)r_1+r_2 \\ (-1)r_1+r_3}} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$=5\times1\times1\times1\times1=5$

(2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & x & 0 & 6 \\ 0 & 3 & x^2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 0 & 6 \\ 3 & x^2 & 0 \\ 2 & 0 & x^3 \end{vmatrix} = 2x^2\begin{vmatrix} x & 6 \\ 2 & x^3 \end{vmatrix}$

$$=2x^2(x^4-12)=2x^6-24x^2$$

【例 1.16】 解方程

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

解　因为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1+r_4]{\substack{r_1+r_2 \\ r_1+r_3}} \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\frac{1}{x+2}r_1} (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & x \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+(-1)r_1]{r_2+(-1)r_1} (x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & x-1 \\ x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}(x+2)\begin{vmatrix} 0 & -1 & x-1 \\ x & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+1}x(x+2)\begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix}=x^4-4x^2$$

所以

$$x^4-4x^2=0$$

可解得方程的解为

$$x_{1,2}=0, x_3=2, x_4=-2$$

【例 1.17】 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

证明　用数学归纳法

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod_{2\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$$

所以 $n=2$ 时行列式成立.

设对于 $n-1$ 阶范德蒙行列式成立,从第 n 行开始,后行依次减去前行的 x_1 倍,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix}$$

按照第 1 列展开,并提出每列的公因子(x_i-x_1),就有

$$D=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

所以 $D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 2}(x_i-x_j)=\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$

【定理 1.6】(拉普拉斯定理) 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} & & \\ \vdots \quad \vdots & 0 & \\ a_{k1}\cdots a_{kk} & & \\ c_{11}\cdots c_{1k} & b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ c_{n1}\cdots c_{nk} & b_{n1}\cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk} \end{vmatrix},D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $D=D_1D_2$.

分析 对 D_1 作行运算,相当于对 D 的前 k 行作相同的行运算,且 D 的后 n 行不变;对 D_2 作列运算,相当于对 D 的后 n 列作相同的列运算,且 D 的前 k 列不变.

证明 因为对 D_1 作适当的行运算 r_i+kr_j,可将 D_1 化为下三角形;同理作适当的列运算 c_i+kc_j,可将 D_2 化为下三角形,分别设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11}\cdots 0 \\ \vdots \quad \ddots \\ p_{k1}\cdots p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},D_2=\begin{vmatrix} q_{11}\cdots 0 \\ \vdots \quad \ddots \\ q_{n1}\cdots q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn}$$

故对 D 的前 k 行作上述行运算,和对 D 的后 n 列作上述列运算后,D 可化为

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$$

注 这个定理有很深刻的意义:行列式可进行某种分块运算,且关于块的运算等同于行列式的运算.

1.6 克莱姆法则

1.6.1 克莱姆(Cramer)法则

我们已经知道二元线性方程组的解与行列式有着密切相关的联系,本节主要介绍 n 元线性方程组的解的公式,这是行列式理论的一个非常重要的应用.

设含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1.9}$$

其中方程组(1.9)中的未知量系数在保持原来的相对位置不变的情况下构成的 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1.9)的系数行列式,记作 $\det D$.

【定理 1.7】(克莱姆法则) 若 n 元线性方程组(1.9)的系数行列式 $D\neq 0$,那么此方程组有唯一解,且

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列的元素用方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换而得到的 n 阶行列式.

证明 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j},A_{2j},\cdots,A_{nj}$ 依次乘方程组(1.9)的 n 个方程,得

$$\begin{cases} (a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)A_{1j}=b_1A_{1j} \\ (a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)A_{2j}=b_2A_{2j} \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)A_{nj}=b_nA_{nj} \end{cases}$$

再把 n 个方程依次相加,得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$$

即 $Dx_j=D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，所以当 $D\neq0$ 时，方程组(1.9)有唯一解.

【例 1.18】 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-5x_3+x_4=8\\ x_1-3x_2-6x_4=9\\ 2x_2-x_3+2x_4=-5\\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0\end{cases}$$

解　方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&-5&1\\1&-3&0&-6\\0&2&-1&2\\1&4&-7&6\end{vmatrix}=27$$

因为 $D\neq0$，所以方程组有唯一解.

又由于

$$D_1=\begin{vmatrix}8&1&-5&1\\9&-3&0&-6\\-5&2&-1&2\\0&4&-7&6\end{vmatrix}=81,D_2=\begin{vmatrix}2&8&-5&1\\1&9&0&-6\\0&-5&-1&2\\1&0&-7&6\end{vmatrix}=-108,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&8&1\\1&-3&9&-6\\0&2&-5&2\\1&4&0&6\end{vmatrix}=-27,D_4=\begin{vmatrix}2&8&-5&8\\1&9&0&9\\0&-5&-1&-5\\1&0&-7&0\end{vmatrix}=27$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,x_2=\frac{D_2}{D}=-4,x_3=\frac{D_3}{D}=-1,x_4=\frac{D_4}{D}=1$$

克莱姆法则给出了线性方程组的解与其系数、常数项之间的一种重要关系.但它只适用于方程个数与未知量个数相等，且系数行列式不等于零的线性方程组.

1.6.2　齐次线性方程组

当线性方程组(1.4)的常数项全为零时，即

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\tag{1.10}$$

我们称方程组(1.10)为齐次线性方程组，否则，称为非齐次线性方程组.

显然，$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 就是方程组(1.10)的一个解，称之为齐次线性方程组(1.10)的零解.如果一组不全为零的数是齐次线性方程组(1.10)的解，则称之为非零解.那么，它除了零解以外是否还有其他非零解呢?

由克莱姆法则可以得出以下定理.

【定理 1.8】 若方程组(1.10)式的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组有唯一零解；若方程组有非零解，则系数行列式 D 必为零.

推论 齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是 $D=0$.

【例 1.19】 讨论以下方程组解的情况

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ 3x_1-x_2+x_3=0\end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

所以，当 $\lambda=1$ 时，$D=0$，此时方程组有非零解；当 $\lambda\neq 1$ 时，$D\neq 0$，此时方程组有唯一的零解.

注 克莱姆法则研究了方程组的系数与方程组解的存在性与唯一性关系.若线性方程组有 n 个方程、n 个未知数，当方程组的系数行列式不等于零时，则方程组有解，且具有唯一的解；如果方程组无解或者有两个不同的解，那么方程组的系数行列式必定等于零.但克莱姆法则有一定的局限性：

(1)当方程组的方程个数与未知数的个数不一致时，或者当方程组系数的行列式等于零时，克莱姆法则失效.

(2)运算量较大，求解一个 n 阶线性方程组要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式.对于更一般的线性方程组理论，我们在第 4 章解决.

小　结

行列式在数学中有着重要的作用,在线性代数的后续内容中是一个有力的工具.

1.排列与逆序数

为了引进 n 阶行列式的定义,揭示行列式中各项符号的规律,我们介绍了排列及逆序数的概念.一般来说,计算排列逆序数的方法有两种.第一种方法:计算出排在 $1,2,\cdots,n$ 前面比它大的数码之和,即分别求出 $1,2,\cdots,n$ 的逆序数,则这 n 个元素的逆序数之和即为这个 n 级排列的逆序数;第二种方法:分别计算出每个元素的逆序数,则每个元素的逆序数之和即为这个排列的逆序数.

2.行列式的计算

行列式的计算是行列式理论中的一个重要问题.n 阶行列式一共有 $n!$ 项,当 n 较大时,$n!$ 是一个相当大的数,直接从定义来计算几乎是不可能的.主要利用行列式的性质来简化计算:

(1)化三角法.我们知道上三角行列式或下三角行列式的值等于主对角线上所有元素的乘积.所谓化三角法就是利用行列式的性质将原行列式化为上三角行列式或下三角行列式来进行计算.

(2)降阶法.利用行列式的展开定理,对行列式逐次降阶.一般按零元素最多的行或列展开.

计算行列式的方法比较多,除了以上两种方法外,还有加边法、递推法、数学归纳法及利用范德蒙德行列式等.有的行列式的计算需要几种方法的综合应用.在计算时,首先观察行列式在结构上的特点,利用行列式的性质对它进行变换后,再考虑能否利用以上方法计算.

3.克莱姆法则

克莱姆法则是行列式理论的一个非常重要的应用,它给出了线性方程组的解与其系数、常数项之间的一种重要关系.但它只适用于方程个数与未知量个数相等,且系数行列式不等于零的线性方程组.克莱姆法则主要应用于理论推导的论证方面,对于更一般的线性方程组理论,我们在第 4 章解决.

习题 1

（Ⅰ类）

1. 求下列各排列的逆序数.

(1)4637251；　　(2)315426；　　(3)671298435.

2. $1274n56m9$ 成偶排列，确定 n 和 m 的值.

3. 确定下列各项在行列式中的符号.

(1)$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$；　　(2)$a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{25}a_{16}$.

4. 计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 7 & 0 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ 4 & 9 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的代数余子式.

5. 利用定义计算下列行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　　(2)$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{vmatrix}$.

6. 计算下列行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$；　　(2)$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$；

(3)$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$；　　(4)$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$.

7. 证明下列等式.

(1)$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$；

(2) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_1+ka_2+la_3 & a_2+ma_3 & a_3 \\ b_1+kb_2+lb_3 & b_2+mb_3 & b_3 \\ c_1+kc_2+lc_3 & c_2+mc_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

8. 计算下列 n 阶行列式.

(1) $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$；　　(2) $D_n=\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$；

(3) $D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$.

9. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

的 (i,j) 元的代数余子式为 A_{ij}.

试求：(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}$；(2) $A_{34}+A_{35}$.

10. 设 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$. 求 D_n.

11. 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2-4x_3=-10 \end{cases}$$

12. 试求用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}ax+4y+z=0\\2y+3z=1\\3x-by=-2\end{cases}$$

的条件,并解方程组.

13.试求用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}ax+2z=2\\5x+2y=1\\x-2y+bz=3\end{cases}$$

的条件,并求其解.

(Ⅱ类)

1.设行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=m$,$\begin{vmatrix}a_{13} & a_{11}\\a_{23} & a_{21}\end{vmatrix}=n$,则行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+a_{13}\\a_{21} & a_{22}+a_{23}\end{vmatrix}$ 等于(　　).

A. $m+n$　　B. $-(m+n)$　　C. $n-m$　　D. $m-n$

2.若 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=m$,则 $\begin{vmatrix}a_1 & -a_2 & a_3\\2b_1 & -2b_2 & 2b_3\\3c_1 & -3c_2 & 3c_3\end{vmatrix}=$(　　).

A. $6m$　　B. $-6m$　　C. $2^3 3^3 m$　　D. $-2^3 3^3 m$

3.设行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & 5 & -1 & 3\\1 & 1 & 1 & 1\\3 & 0 & -8 & 7\\4 & -3 & 5 & 1\end{vmatrix}$,则 $2A_{41}+5A_{42}-A_{43}+3A_{44}=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. -16

4.函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & 1 & -1\\-x & -x & x\\1 & 2 & x\end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是________.

5.若在 n 阶行列式中等于零的元素个数超过 n^2-n 个,则这个行列式的值等于________.

6.设含参数 λ 的方程组 $\begin{cases}\lambda x+y+z=0\\x+\lambda y+z=0\\x+y+z=0\end{cases}$ 只有零解,则 λ 应满足________.

7.解线性方程组 $\begin{cases}x+y+z=a\\x+\varepsilon y+\varepsilon^2 z=b\\x+\varepsilon^2 y+\varepsilon z=c.\end{cases}$,其中 $\varepsilon\neq 1$,$\varepsilon^3=1$.

8. 证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

9. 设有行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 7 & -8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$，计算

(1) $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$（其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式）；

(2) $M_{14}+M_{24}+M_{34}+M_{44}$（其中 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式）.

测试题
选择题

测试题
判断题