第 1 章　集合与函数

高等数学的研究对象基本上是变动的量，而函数是高等数学研究的主要对象．通过本章的学习，可以使我们对函数及其相关的概念有一个比较清晰的了解，为今后的学习打下良好的基础．

1.1　集　　合

集合是高等数学中的一个基本概念，它在现代数学以及其他自然科学中都有广泛的应用．本节重点介绍集合的一些基础知识．

1.1.1　集合的概念

所谓集合，按集合论的奠基者康托尔（Cantor）所述："集合为我们的感觉或思维中确定的个别对象的汇总．"通俗地说，集合就是指具有某种属性的对象的全体，所确定的每一个对象称为集合的"元素"．

集合（简称集）的例子很多．例如，自然数的全体构成一个集合；整数的全体构成一个集合；实数的全体也构成一个集合．通常我们把自然数的全体构成的集合记作 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，整数的全体构成的集合记作 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，实数的全体构成的集合记作 $\mathbf{R}$.

习惯上，我们用大写字母 $A,B,C\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素．

通常我们用列举法或性质描述法来表示一个集合．列举法表示一个集合的形式为

$$A=\{a,b,c,\cdots\}.$$

用性质描述法表示一个集合的形式为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有的性质}\}.$$

例如，上面的自然数集 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$，整数集 $\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 等都是用列举法表示的集合；而对于 $X=\{x\mid x<0,x\in\mathbf{R}\}$，$A=\{x\mid x^3-1=0\}$ 等都是用性质描述法表示的集合．

集合的表示方法便于我们表示一些具有某种性质的集合．例如，为了表示以正实数为元素的集合，我们可记为

$$X=\{x\mid x>0\}.$$

为了表示介于 a 与 b 之间的所有实数为元素的集合，我们可记为

$$Y=\{x\mid a<x<b\}.$$

同样，为了表示以圆 $x^2+y^2=1$ 上的点为元素的集合，可记为

$$A=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}.$$

注 集合的元素不仅可以是抽象的数，也可以是一些具体的实物. 例如，将某班级看作一个集合，其元素可取为该班的学生；若将某公司看作一个集合，它所属的工厂就可作为元素.

如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为有限集；不是有限集的集合称为无限集.

不包含任何元素的集合，称为空集，记作 $\varnothing$.

例如：若 $A=\{x\mid x>0$ 且 $x<0\}$，则 A 是空集，于是记为 $A=\varnothing$.

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的子集，记作 $A\subseteq B$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A.

如果两个集合 A 和 B，满足 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$.

例如：设

$$A=\{x\mid x>2\text{或 } x<0\},B=\{x\mid x^2-2x>0\},$$

则有 $A=B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$.

规定空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

在某一条件下，将所讨论的全部事物作为元素构成的集合称为全集，记作 U.

注 全集是相对的，一个集合在一定条件下是全集，在另一条件下则未必是全集.

例如，自然数集 $\mathbf{N}$ 可以看作是一个全集，但是当把自然数集 $\mathbf{N}$ 和全体负整数构成一个集合时，自然数集 $\mathbf{N}$ 就不是全集了.

【例 1】 用集合符号表示下列集合：

(1)方程 $x^2-3x+2=0$ 的根的集合；

(2)小于 10 的全体正整数的集合；

(3)直线 $x+y=1$ 上的点的集合.

解 (1)$A=\{1,2\}$；

(2)$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$；

(3)$A=\{(x,y)\mid x+y=1\}$.

1.1.2 集合的运算

1. 集合的并

设集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作 A 并 B

即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

显然有

(1)$A\subset(A\cup B)$　(2)$B\subset(A\cup B)$　(3)$A\cup A=A$　(4)$A\cup U=U$　(5)$A\cup\varnothing=A$.

2. 集合的交

设集合 A 和 B，由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作 A 交 B

即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

显然有

(1)$(A\cap B)\subset A$　(2)$(A\cap B)\subset B$　(3)$A\cap U=A$　(4)$A\cap A=A$　(5)$A\cap\varnothing=\varnothing$.

3. 集合的补

设全集 U 中所有不属于 A 的元素构成的集合，称为 A 的补集，记作 $\complement_U A$，读作 A 的补集

即

$$\complement_U A=\{x\mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}.$$

4. 集合的差

设集合 A 和 B，由属于 A，而不属于 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，读作 A 与 B 的差集

即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

【例 2】 利用集合的运算表示下列集合，并求出集合的元素的个数.

设某班有 100 名学生，有 70 名学生会讲汉语，以集合 A 表示这些学生；有 75 名学生会讲英语，以集合 B 表示这些学生；有 50 名学生两种语言都会讲，以集合 C 表示这些学生. 求：

(1)只会讲汉语的学生的集合及人数；

(2)只会讲英语的学生的集合及人数；

(3)两种语言中至少会其中一种的学生的集合及人数；

(4)两种语言都不会讲的学生的集合及人数.

解　(1)只会讲汉语的学生的集合

$$A-C.$$

人数为

$$70-50=20(\text{人}).$$

(2)只会讲英语的学生的集合

$$B-C,$$

人数为

$$75-50=25(\text{人}).$$

(3)两种语言中至少会其中一种的学生的集合

$$A\cup B,$$

人数为

$$20+25+50=95(\text{人}).$$

(4)两种语言都不会讲的学生的集合

$$\complement_U(A\cup B),$$

人数为

$$100-95=5(\text{人}).$$

【例 3】 如果 $A=\{x\mid 0<x<5\}$，$B=\{x\mid 3<x<6\}$，求：

(1)$A\cup B$； (2)$A\cap B$； (3)$A-B$； (4)$B-A$.

解 (1)$A\cup B=\{x\mid 0<x<6\}$；

(2)$A\cap B=\{x\mid 3<x<5\}$；

(3)$A-B=\{x\mid 0<x\leqslant 3\}$；

(4)$B-A=\{x\mid 5\leqslant x<6\}$.

下面我们给出集合的运算规律：

交换律：(1)$A\cup B=B\cup A$ (2)$A\cap B=B\cap A$.

结合律：(1)$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$ (2)$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律：(1)$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ (2)$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

吸收律：(1)$(A\cup B)\cap A=A$ (2)$(A\cap B)\cup A=A$.

对偶律：(1) $\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$ (2) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$.

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡尔(Descartes)乘积. 设 A、B 是任意两个集合，在集合 A 中任意取一个元素 x，在集合 B 中任意取一个元素 y，组成一个有序对(x,y)，把这样的有序对作为新的元素，它们的全体组成的集合成为集合 A 与集合 B 的直积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\text{ 且 }y\in B\}.$$

1.1.3 区间和邻域

上面我们给出了集合的定义及其一些运算规律，下面我们再来认识实数集 $\mathbf{R}$ 中两类重要的数集：区间和邻域.

1. 区间

通俗地讲，区间就是介于两实数 a 与 b 之间的一切实数，其中 a,b 称为区间的两个端

点;当 $a<b$ 时,则称 a 为左端点,b 为右端点.

区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$,

(1)闭区间:若 $A=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,则集合 A 称为以 a,b 为端点的闭区间,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

(2)开区间:若 $A=\{x\mid a<x<b\}$,则集合 A 称为以 a,b 为端点的开区间,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

(3)左半开区间:若 $A=\{x\mid a<x\leqslant b\}$,则集合 A 称为以 a,b 为端点的左半开区间,记为 $(a,b]$,即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

(4)右半开区间:若 $A=\{x\mid a\leqslant x<b\}$,则集合 A 称为以 a,b 为端点的右半开区间,记为 $[a,b)$,即

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

无限区间

就是 a 与 b 两端点中至少有一个端点是负无穷大或正无穷大.为了表示正无穷大或负无穷大,我们引入记号“$+\infty$”表示正无穷大,“$-\infty$”表示负无穷大,则无限区间可分为:

(1)$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

(2)$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

(3)$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;

(4)$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

(5)$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}$.

2. 邻域

定义 1.1　设 $a,\delta\in\mathbf{R},\delta>0$,数集 $\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$,即实数轴上到 a 的距离小于 δ 的点的全体,称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$.点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心与半径.

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(a-\delta,a+\delta),$$

当泛指某个邻域时,也可以简单地记作 $U(a)$.

数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的空心(去心)δ 邻域,记作 $U(\hat{a},\delta)$,即 $U(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域.例如

$$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\},$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

习题 1.1

1. 用集合的表示法表示下列集合：

(1)大于 1 且小于 9 的所有整数的集合；

(2)不小于$\frac{1}{2}$的一切实数的集合；

(3)方程组$\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=6\end{cases}$的解的集合；

(4)圆 $x^2+y^2=R^2$ 内部的一切点的集合.

2. 下列集合哪些是非空集合，哪些是空集$\varnothing$.

(1)$A=\{1,2,3,\cdots\}$；　　(2)$A=\{x\mid x>0$ 且 $x<0\}$；

(3)$A=\{\varnothing\}$；　　(4)$A=\varnothing$.

3. 设 $A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，则下列各种写法中，哪些是正确的，哪些是错误的？

(1)$1\in A$；　　(2)$\{1\}\in A$；

(3)$\{1\}\subset A$；　　(4)$\varnothing\subset B$；

(5)$\varnothing\in B$；　　(6)$\{\varnothing\}\subset B$；

(7)$A\subset U$；　　(8)$B\subset U$；

(9)$A=B$；　　(10)$\complement_U A=B$；

(11)$A\cup B=U$.

4. 设 $A=\{1,2,3,5,7\}$，$B=\{2,5,6,8\}$，求：

(1)$A\cup B$；　　(2)$A\cap B$；

(3)$A-B$；　　(4)$B-A$.

5. 设 $A=\{x\mid -1<x<2\}$，$B=\{x\mid 0<x<3\}$，求：

(1)$A\cup B$；　　(2)$A\cap B$；

(3)$A-B$；　　(4)$B-A$.

6. 设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,3,4,7,8\}$，$B=\{2,4,6,7,9\}$，求：

(1) $\complement_U A$；　　(2) $\complement_U B$；

(3) $\complement_U A\cup\complement_U B$；　　(4) $\complement_U A\cap\complement_U B$.

7. 用区间表示满足下列不等式的集合：

(1)$|x|\leqslant 2$；　　(2)$|x-1|\leqslant 3$；

(3)$|x|\geqslant 1$；　　(4)$|x-2|\geqslant 3$；

(5)$x^2-2x-3<0$.

8. 点 a 的空心邻域与点 a 的邻域有何区别？

9. 设 A、B 是任意两个集合，证明对偶律：

$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$

1.2　映射与函数

1.2.1　映射的概念

定义 1.2　设 X、Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的映射，记作

$$f: X \to Y,$$

其中 y 称为元素 x 的像，并记作 $f(x)$，即：$y=f(x)$，而元素 x 称为元素 y 的一个原像；集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=X$；X 中所有元素的像组成的集合称为映射的值域，记作 R_f，即

$$R_f=f(X)=\{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中，需要注意的是：

(1)构成映射必须具备以下三个要素：集合 X，集合 Y，对应法则 f，使对每个 $x \in X$，有唯一确定的 $y=f(x)$与之对应.

(2)对每个 $x \in X$，元素 x 的像 y 是唯一的；而对每个 $y \in R_f$，元素 y 的原像不一定是唯一的；映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集，即 $R_f \subset Y$，不一定 $R_f=Y$.

【例 1】　设 $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$，对每个 $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$f(x)=\sin x$. f 是一个映射，其定义域 $D_f=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，值域 $R_f=[-1,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的满射；若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$，它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 上的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射（双射）.

设 f 为到 Y 上的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，适合 $y=f(x)$. 于是，我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g，即

$$g: R_f \to X,$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $y=f(x)$. 这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按照上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在例 1 中的映射 f 存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arcsin x, x \in [-1,1]$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1 \qquad f: Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个新对应法则，它将 $x \in X$ 每个元素映成 $f[g(x)] \in \mathbf{Z}$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f \cdot g$，即

$$f \cdot g: X \to Z,$$
$$(f \cdot g)(x) = f[g(x)], x \in X.$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g \subset D_f$. 否则，不能构成复合映射. 由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f \cdot g$ 有意义并不表示 $g \cdot f$ 也有意义. 即使 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 都有意义，复合函数 $f \cdot g$ 与 $g \cdot f$ 也未必相同.

【例 2】 设有映射 $g: R \to [-1,1]$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$g(x) = \sin x$，映射 $f: [-1,1] \to [0,1]$，对每个 $u \in [-1,1]$，$f(u) = \sqrt{1-u^2}$. 则映射 g 和 f 构成的复合映射 $f \cdot g: R \to [0,1]$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，有

$$(f \cdot g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|.$$

1.2.2 函数的概念

在自然科学、经济学以及现代管理科学中都会出现大量的变量之间的函数关系. 下面通过一些实例来引入函数这一重要概念.

【例 3】 某海域昼夜水温 T 和时间 t 是两个变量，通过自动温度记录仪可以描绘出一条曲线如图 1.1 所示. 这个图形表示了气温 T 和时间 t 之间的函数关系.

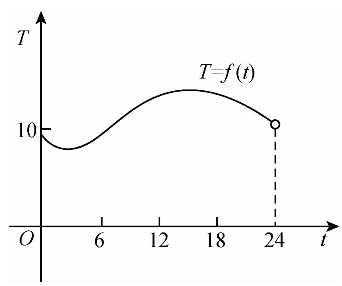


图 1.1

【例 4】 某公司 2001 年上半年某产品的销量（单位：个）如下表：

表 1.1

月份 t	1	2	3	4	5	6
销量 y	1900	1850	2000	1950	1920	1890

通过上表，可以看出 3 月份该产品的销量最多，可以建立销量 y 与月份 t 之间的函数关系，这样有助于把握产品的销售情况.

【例 5】 1 g 冰由 -10 ℃升至 10 ℃水的过程中，它所吸收的热量 Q 与温度 T 之间的函数关系式如下：

$$Q = \begin{cases} 0.5(T+10), & -10 \leqslant T < 0, \\ T+85, & 0 \leqslant T \leqslant 10. \end{cases}$$

下面我们给出函数的定义：

定义 1.3　设数集 $D\in\mathbf{R}$,则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,通常简记为 $y=f(x)$. x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域,数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为函数 $f(x)$的值域,记作 R_f 或 $f(D)$. 当 $x=x_0$ 时对应的函数值记为 $f(x_0)$.

需要指出,按照上述定义,记号 f 和 $f(x)$的含义是有区别的:前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便,习惯上常用记号“$f(x)$,$x\in D$”或“$y=f(x)$,$x\in D$”来表示定义在 D 上的函数,这时应理解为由它所确定的函数 f.

由函数的定义可以看出,函数是从实数集到实数集的映射,其值域总在 R 内,因此确定函数有两个要素:定义域和对应法则. 所以,两个函数相同的充分必要条件是两函数的定义域和对应法则对应相同.

【例 6】　判断下列函数是否表示相同的函数关系式:

(1)函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$和 $y=x$;

(2)函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$.

解　(1)因为函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$的定义域为 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 0$,而函数 $y=x$ 的定义域为 $x\in\mathbf{R}$,它们的定义域不同,所以说函数 $y=\dfrac{x^2}{x}$与 $y=x$ 不同.

(2)易知函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$的定义域都是 $x\in\mathbf{R}$,而 $y=\sqrt{x^2}=|x|$,因此函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$有相同的定义域和对应法则,所以说函数 $y=|x|$与 $y=\sqrt{x^2}$表示相同的函数关系式.

在函数的定义中,对每个 $x\in D$,对应的函数值 y 总是唯一的. 如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个 $x\in D$,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,那么对于这样的对应法则并不符合函数的定义,习惯上我们称这种法则确定了一个多值函数. 例如,设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 可确定出对应的 y 值,当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时,对应 $y=0$ 一个值;当 x 取$(-r,r)$内任一个值时,对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数. 对于多值函数,如果我们附加一些条件,使得在附加条件之下,按照对应法则,对每个 $x\in D$,总有唯一确定的实数值 y 与之对应,那么这就确定了一个函数. 我们称这样的函数为多值函数的单值分支.

表示一个函数通常有三种方法:图像表示法、表格表示法和公式表示法.

1. 图像表示法:就是用图像来表达函数关系式. 这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势,但根据函数图像所求出的函数值准确度不高且不便于作理论研究.

2. 表格表示法:就是用表格来表达函数关系式. 这种方法的优点是查找函数值比较方便,缺点是数据有限、不直观、不便于作理论研究.

3. 公式表示法:就是用数学公式表达函数关系. 例如 $y=(1+\dfrac{1}{x})^2$,这种方法的优点是

形式简明，便于作理论研究与数值计算，缺点是不如图像法直观.

由此可见，前面例 3 就是用图像表示法来表示一个函数；例 4 就是用表格表示法来表示一个函数；例 5 就是用公式表示法来表示一个函数.

在用公式法表示函数时，我们还会遇到下面几种情况：

(1)分段函数

在自变量的不同取值范围内，有不同的公式表示的函数，称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases} x+1, x<0, \\ x^2, 0\leqslant x\leqslant 2, \\ \ln x, 2<x\leqslant 5, \end{cases}$$

就是一个定义在区间$(-\infty,5]$上的分段函数.

(2)用参数方程确定的函数

参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (t\in I),$$

表示了变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数. 例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ $(x\in[-1,1])$可以用参数方程

$$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant \pi),$$

来表示.

(3)隐函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如，方程 $e^x+xy-1=0$ 就确定了变量 y 与变量 x 之间的函数关系.

注 能表示成 $y=f(x)$(其中 $f(x)$仅为 x 的解析式)的形式的函数，称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程，称为“隐函数的显化”. 例如 $e^x+xy-1=0$ 可以化成显函数$y=\dfrac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数却不能化成显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$.

在实际问题中，函数的定义域与问题的实际意义有关. 在数学中，有时候不考虑函数的实际意义，这时我们约定函数的定义域就是自变量所能取到的使函数有意义的一切实数，例如，函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$，函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1,1)$.

一般地，自变量 x 在定义域内任取一个数值时，对应的函数值是唯一的，这种函数我们称之为单值函数，在以后的章节中若无特殊说明，函数都是指单值函数.

【例 7】 求函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域.

解　根据对数的真数必须为正数;分数的分母不能为零,可以得到该函数的定义域 D 满足不等式组

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x-1\neq 0, \end{cases}$$

解得

$$x>-1 \text{ 且 } x\neq 1,$$

即

$$D=(-1,1)\cup(1,+\infty).$$

【例 8】　求分段函数 $f(x)$ 的定义域和值域.

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & 0<x<1, \\ 0, & x=0, \\ -x-1, & -1\leqslant x<0, \end{cases}$$

解　如图 1.2 所示,$f(x)$ 的定义域为

$$D=\{x \mid -1\leqslant x<1\};$$

其值域为

$$W=\{f(x) \mid -1<f(x)<1\}.$$

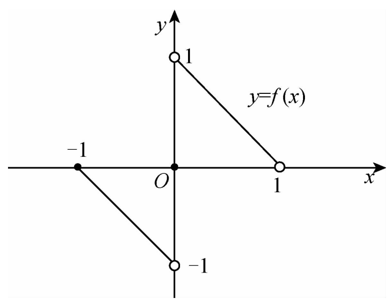


图 1.2

小结　函数由解析式给出时,其定义域是使解析式有意义的一切函数值.为此,求函数的定义域时应遵守以下原则:

1. 在分式中分母不能为零;
2. 在偶次根式内非负;
3. 在对数中真数大于零;
4. 反三角函数 $\arcsin x$,$\arccos x$,要满足 $|x|\leqslant 1$;
5. 两函数和(差)的定义域,应是两函数定义域的公共部分;
6. 分段函数的定义域是各段定义域的并集;
7. 求复合函数的定义域时,一般是由外层向里层逐步求.

1.2.3 函数的几种特性

下面所讨论的函数的定义域都假设为 D.

1. 奇偶性

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为偶函数;

如果函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,对于任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$ 为奇函数.

注 (1)偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

(2)判断一个函数是奇函数还是偶函数，首先要看它的定义域是否关于原点对称，然后再来判断它的奇偶性.

【例 9】 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；　(2)$f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解 (1)函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$关于原点对称. 任意取一个 $x\in D$，则 $-x\in D$ 有

$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

所以 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$是偶函数.

(2)函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$的定义域为 $D=(-1,1)$，关于原点对称. 任意取 $x\in D$，则 $-x\in D$ 有

$$f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$是奇函数.

【例 10】 证明：如果函数 $f(x)$的定义域关于原点对称，则

(1)$F_1(x)=f(x)+f(-x)$为偶函数；

(2)$F_2(x)=f(x)-f(-x)$为奇函数.

证明 (1)由 $F_1(-x)=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=F_1(x)$，

所以 $F_1(x)=f(x)+f(-x)$是偶函数；

(2)同理，由 $F_2(-x)=f(-x)-f(x)=-[f(x)-f(-x)]=-F_2(x)$，

所以 $F_2(x)=f(x)-f(-x)$是奇函数.

2. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq0$，对任意 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$为周期函数，T 为函数的周期.

注 (1)周期函数的周期 T，通常是指满足上述条件的最小正周期.

(2)周期函数若以 T 为周期，则在每个长度为 T 的相邻区间上函数图像有相同的形状；

(3)周期函数若以 T 为周期，则 $nT\neq0(n\in\mathbf{Z})$也是函数的周期.

【例 11】 求函数 $y=\cos 2x$ 的周期.

解 因为 $y(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)=\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$，所以说，函数 $y=\cos 2x$ 的周

期是 π.

【例 12】 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\0, x\in\overline{\mathbf{Q}},\end{cases}$$

容易验证这是一个周期函数,任何正有理数 r 都是它的周期.因为不存在最小的正有理数,所以它没有最小的正周期.

3. 单调性

如果函数 $f(x)$在区间 I 内随 x 的增大而增大,即对于 I 内的任意两点 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增加的;反之,若有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.

4. 有界性

对于函数 $f(x)$,在区间 $I\in D$ 内对任意 $x\in I$,如果存在数 M_1,对应的函数值均有 $f(x)\leqslant M_1$,则称 $f(x)$在区间 I 内有上界;M_1 称为函数 $f(x)$在 I 上的一个上界.

如果存在数 M_2,使得 $f(x)\geqslant M_2$ 对任意 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 内有下界,而 M_2 称为 $f(x)$在 I 上的一个下界.

如果存在 $M>0$,使得

$$|f(x)|\leqslant M,$$

对任意 $x\in I$ 都成立,则称函数 $f(x)$在 I 上有界.如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在 I 上无界;这就是说,如果对于任意正数 M,总存在 $x_1\in I$,使 $|f(x_1)|>M$,那么函数 $f(x)$在 I 上无界.

例如,$y=\cos x$ 在 $x\in\mathbf{R}$ 内是有界函数(大于 1 的任何数都是它的上界,小于 -1 的任何数都是它的下界);$y=\dfrac{1}{x}$在 $x\in\mathbf{R}$ 是无界函数.

【例 13】 证明函数 $y=\sin x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

证明 令 $f(x)=\sin x$,任意取 $x_1,x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,不妨设 $x_1<x_2$ 则

$$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2},$$

因为 $x_1,x_2\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,所以$\dfrac{x_2+x_1}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

于是

$$\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0,$$

又因为 $x_1<x_2$，所以有 $x_2-x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

于是得到

$$\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

所以

$$2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0,$$

即

$$f(x_2)>f(x_1),$$

因此，$y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加；

又因为 $|y|=|\sin x|\leqslant 1$，所以 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上有界.

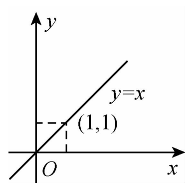
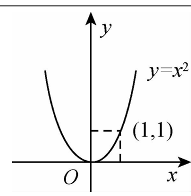
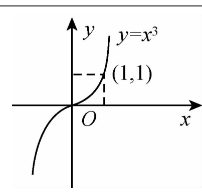
故，函数 $y=\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加且有界.

1.2.4 基本初等函数

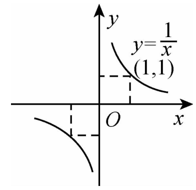
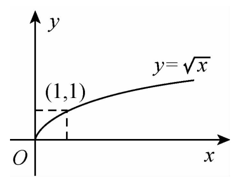
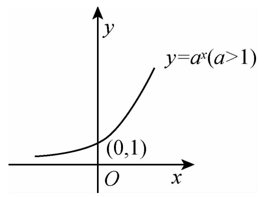
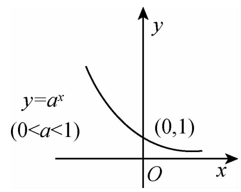
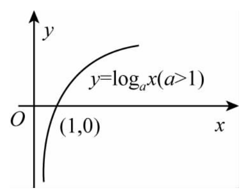
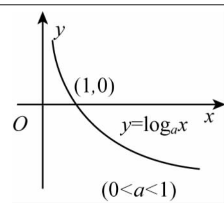
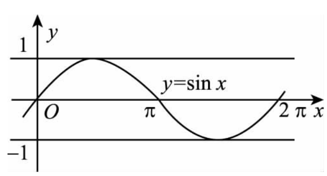
1. 基本初等函数

我们通常把幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 它们的图像、性质如表 1.2 所示.

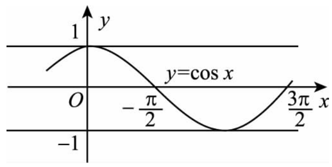
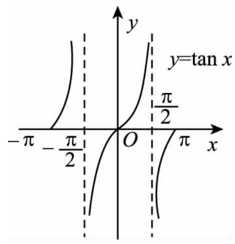
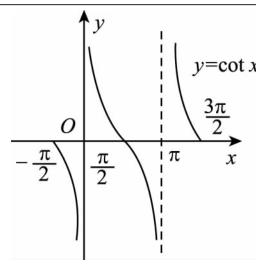
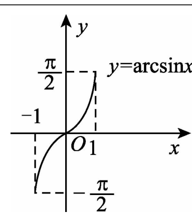
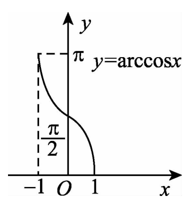
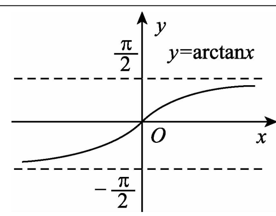
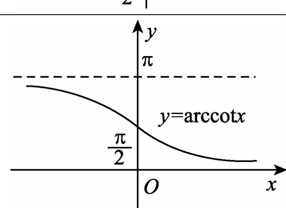
表 1.2

	函数	定义域与值域	图像	特性
幂	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
函	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
数	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

续表

幂函数	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少，$k\in\mathbf{Z}$

续表

三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加，$k\in\mathbf{Z}$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，$k\in\mathbf{Z}$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少，$k\in\mathbf{Z}$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

2. 复合函数

先看一个例子，设 $y=\sin u$，$u=x^2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$ 有 $u=x^2\in[0,+\infty)$，又通过 $y=\sin u$，得到 $y=\sin x^2\in[-1,1]$，即通过中间变量 u，从而构成 y 是 x 的函数，于是称 $y=\sin x^2$ 是 $y=\sin u$ 和 $u=x^2$ 的复合函数.

定义 1.4　设有两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域相交非空，那么 y 通过 u 的作用成为 x 的函数，于是我们称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 及函数 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量.

如自由落体运动的物体，其动能 $E=\frac{1}{2}mv^2$ 及速度 $v=gt$，于是它们所构成的复合函数是 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

【例 14】　设 $f(x)=x^3-x$，$\varphi(x)=\sin 2x$，求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

解　由复合函数的定义知

$$f[\varphi(x)]=(\sin 2x)^3-\sin 2x,$$

$$\varphi[f(x)]=\sin 2(x^3-x).$$

【例 15】　设 $f(x)=\begin{cases}2x+3 & x\leqslant 0\\ 2^x & x>0\end{cases}$，求：$f(-1)$，$f(0)$ 及 $f[f(-1)]$.

解　$f(-1)=2\cdot(-1)+3=1$，

$f(0)=2\cdot 0+3=3$，

$f[f(-1)]=f(1)=2^1=2$.

【例 16】　将下列复合函数分解成基本初等函数或简单初等函数：

(1) $y=\arcsin(\ln x)$；

(2) $y=\sin^2\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$；

(3) $y=\ln(\tan e^{x^2+2\sin x})$.

解　(1)外层是反正弦函数，即 $y=\arcsin u$，内层是对数函数，即 $u=\ln x$，所以分解得 $y=\arcsin u$，$u=\ln x$.

(2)最外层是幂函数，即 $y=u^2$，次外层是正弦函数，即 $u=\sin v$，从外向里第三层又是幂函数，即 $v=w^{-\frac{1}{2}}$，最里层是多项式函数，即 $w=x^2+1$.
所以，分解得 $y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{-\frac{1}{2}}$，$w=x^2+1$.

(3)最外层是对数函数，即 $y=\ln u$，次外层是正切函数，即 $u=\tan v$，从外向里第三层是指数函数，即 $v=e^w$，最里层是简单初等函数，即 $w=x^2+2\sin x$.
所以，分解得 $y=\ln u$，$u=\tan v$，$v=e^w$，$w=x^2+2\sin x$.

注　(1)并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 如 $y=\sqrt{u-2}$，$u=\sin x$ 在实数范围内就不能进行复合. 这是因为 $u=\sin x$ 在其定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中任何 x 的值对应的

u 值都小于 2，它们都不能使 $y=\sqrt{u-2}$ 有意义. 即两函数能复合的充要条件是：$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 且内函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外函数 $y=f(u)$ 的定义域相交非空.

（2）复合函数的复合过程是由里到外，函数"套"函数而成的；分解复合函数时，是采取由外到内层层分解的办法，拆分成若干基本初等函数或基本初等函数的四则运算的函数（简单初等函数）.

1.2.5 初等函数

定义 1.5 由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合运算构成的且可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如：$y=2x^2-1$，$y=\sin\dfrac{1}{x}$，$y=|x|=\sqrt{x^2}$ 以及前面我们见过的很多函数都是初等函数. 高等数学中讨论的函数绝大多数都是初等函数. 但需要注意的是，分段函数一般不是初等函数.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x-x^2}}$；　　（2）$y=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

（3）$y=\arccos\dfrac{1}{x}$；　　（4）$y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

2. 求下列函数的值：

（1）设 $f(x)=e^{\sin x^2}$，求：$f(0)$，$f\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$，$f(f(0))$；

（2）设 $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leqslant 0 \\ x-4 & x>0 \end{cases}$，求：$f(0)$，$f(-1)$，$f(2)$，$f(f(e+2))$.

3. 下列函数是否相同，为什么？

（1）$f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$；

（2）$f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$；

（3）$f(x)=x+1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=\sin x\cos x$；　　（2）$y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{2}$；

（3）$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　（4）$y=\dfrac{1+x}{1-x}$.

5. 设 $f(x)=1-x^2$，$\varphi(x)=\cos x$，求：$f(\varphi(x))$和 $\varphi(f(x))$.

6. 写出下列各函数的复合过程：

(1) $y=\arctan x^2$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\cos^2 x}$；

(3) $y=(1+\ln x)^3$；　　(4) $y=\dfrac{\ln\sqrt{(x+\sin x)}}{\mathrm{e}^x}$.

7. 讨论函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$的单调性.

8. 设函数 $f(x)$是以 $T>0$ 为周期的周期函数，试证明 $f(ax)(a>0)$是以$\dfrac{T}{a}$为周期的周期函数.

9. 设函数 $f(x)$在数集 X 上有定义，试证：函数 $f(x)$在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

10. 联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式为 $F=\dfrac{9}{5}C+32$，并求

(1) 90 ℉的等价摄氏温度和-5 ℃的等价华氏温度；

(2) 是否存在一个温度值，使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的？如果存在，那么该温度值是多少？