第9章　多元函数积分学

多元函数积分学主要包括重积分、曲线积分以及曲面积分等.根据教学要求,本章主要介绍二重积分的有关概念、计算和应用.二重积分在解决问题中所体现的思想和方法同定积分是一致的,而且对它的计算最终仍归结到定积分上来.可见多元函数积分学是对定积分的一种推广和拓展.

9.1　二重积分的概念和性质

9.1.1　二重积分的概念

首先让我们来认识一种几何体:曲顶柱体.

设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,且 $f(x,y)\geqslant 0$,以曲面 $z=f(x,y)$ 为顶,以区域 D 为底,且以 xOy 平面上 D 的边界为准线而母线平行于 z 轴为侧面的几何体,称为曲顶柱体.如图9.1所示.

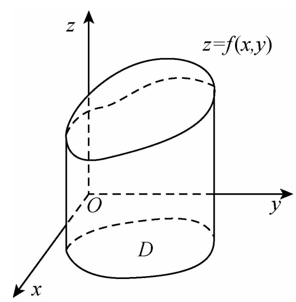

图 9.1

引例　求上述曲顶柱体的体积 V.

分析　由于该几何体的高会随着 $z=f(x,y)$ 而变化,所以我们不可能用底面积乘以高来计算它的体积,但是如果我们利用像解决曲边梯形面积的思想和方法来解决此题,相比就容易多了.为此,我们可以作如下的解答.

(1)区域分割

将区域 D 任意分成 n 个小区域,依照曲顶柱体的规定,从而将整个曲顶柱体分割成了 n 个小的曲顶柱体,用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 块小的区域,同时用 $\Delta\sigma_i$ 表示该区域的面积.

(2)近似表示

在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i),用底为 $\Delta\sigma_i$,高为 $f(\xi_i,\eta_i)$ 的平顶柱体来近似代替该区域上小的曲顶柱体的体积 ΔV_i,如图9.2所示,即

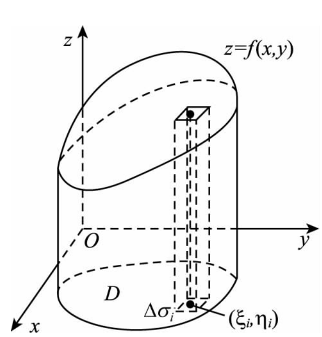

图 9.2

$$\Delta V_i\approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

(3)求和式

于是整个曲顶柱体的体积 V，就可以用 n 个小的平顶柱体体积 ΔV_i 来近似表示出来，即

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

(4) 取极限

引入参数 λ，它表示被分割的小区域 $\Delta\sigma_i$ 中直径的最大值(区域的直径是指有界闭区域上两点间距离最大的值)，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则所得的极限值就是我们要求的曲顶柱体的体积 V，即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i.$$

如果抛开上述问题的实际含义，我们就能得到二重积分的概念.

定义 9.1 设函数 $z = f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n),$$

用 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 块小的区域，同时用 $\Delta\sigma_i$ 表示该区域的面积，在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i, η_i)，作乘积

$$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i = 1, 2, \cdots, n),$$

并求和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

取参数 λ，它表示被分割的小区域 $\Delta\sigma_i$ 中直径的最大值(区域的直径是指有界闭区域上两点间距离最大的值)，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 存在，则称函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上可积，极限值称为函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上的二重积分，记为 $\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中，$f(x, y)$ 称为被积函数，$f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 称为面积微元，x, y 称为积分变量，D 称为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 称为积分和式.

说明 函数只要存在二重积分，则该积分的值与区域的怎样分割、在小区域上的任意取法以及积分变量的字母表示是无关的；它只与被积函数和积分区域有关.

9.1.2 二重积分的几何意义

从对曲顶柱体体积的求法可以看出，二重积分的几何意义是明显的，当被积函数 $f(x, y) \geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 表示曲顶柱体的体积；当 $f(x, y) \leqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 表示曲顶柱体的

体积的负值；当 $f(x,y)$ 在区域内有正有负时，这时$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值就等于 xOy 坐标面上方和下方曲顶柱体体积的代数和.

9.1.3 二重积分的性质

二重积分的性质同定积分的性质类似，仿照对定积分性质的理解，我们可以比较容易地理解二重积分的性质.

性质 1 被积函数的常数因子可以提到积分号的外面去，即

$$\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma(\text{其中 } k \text{ 为常数}).$$

性质 2 函数和或差的二重积分等于各个函数的二重积分的和或差，即

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 3 （二重积分的区域可加性定理）如果区域 D 被分割成 $D_1 + D_2$，则函数在 D 上的二重积分就等于分别在 D_1 和 D_2 上的二重积分的和，即

$$\iint\limits_{D=D_1+D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

此外，该性质还可以推广到区域被分割成任意有限个的情况.

性质 4 若函数在区域 D 上恒等于常数 1，设 S 是区域 D 的面积，则

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma.$$

此性质通过二重积分的几何意义很容易理解.

性质 5 若在区域 D 上有 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质 6 （二重积分的估值定理）设 M,m 分别是函数 $f(x,y)$ 区域 D 上的最大值和最小值，S 是区域 D 的面积，则有

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MS.$$

性质 7 （二重积分的中值定理）设函数 $f(x,y)$ 区域 D 上连续，S 是区域 D 的面积，则在区域 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S.$$

此定理可以结合定积分的中值定理和二重积分的几何意义去理解，其几何意义也是很明显的.

习题 9.1

1. 利用二重积分的几何意义计算下列各积分：

(1)$\iint\limits_{D} k\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$（k 为常数且 $k\geqslant 0$）；

(2)$\iint\limits_{D}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant R^2$；

(3)$\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：$x^2+y^2\leqslant 1$.

2. 试比较二重积分 $I_1=\iint\limits_{D}(x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_{D}(x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中 D：$x+y=1$，$x=0$，$y=0$.

3. 利用二重积分的性质估计积分 $I=\iint\limits_{D}\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}\sigma$ 值的范围，其中 D：$0\leqslant x\leqslant \pi$，$0\leqslant y\leqslant \pi$.

9.2　二重积分的计算

利用二重积分的定义和性质来计算二重积分，一般是很困难的，有时甚至是不可能的. 本节我们从二重积分的几何意义入手，给出求二重积分的计算方法，此方法就是将二重积分转化为二次积分来计算.

9.2.1　在直角坐标系下的计算

根据二重积分的定义，区域划分并不会影响积分的值，因此为了方便计算，我们可以用平行于坐标轴的直线来分割区域，将区域分割成为若干小的矩形，图 9.3 所示，从而将面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 转化为 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是二重积分可以写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

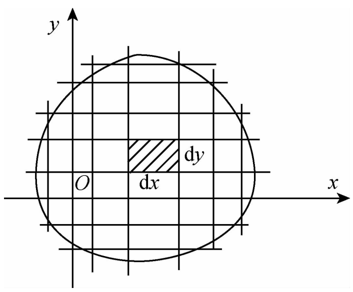

图 9.3

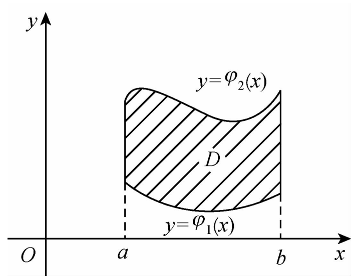

图 9.4

下面根据积分区域 D 的三种不同形状分别来讨论它的计算方法.

1. X — 型区域

设平面区域 D 由 $y=\varphi_1(x)$，$y=\varphi_2(x)$（$\varphi_2(x)\geqslant\varphi_1(x)$）以及直线 $x=a$，$x=b$ 所围成，如图 9.4 所示. 称此区域 D 为 X — 型区域.

X — 型区域 D 可表示成如下的不等式组：

$$D:\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b, \\ \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x), \end{cases}$$

该区域的特点是，平行于 y 轴且穿过区域 D 内部的直线与区域 D 的边界的交点不会超过两点.

由二重积分的几何意义知，当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值等于某曲顶柱体的体积. 而该曲顶柱体的体积，可以利用“平行截面为已知的立体体积” 的方法来求得，于是我们可以分两步来完成：

(1) 先求截面面积 $S(x)$.

在$[a,b]$上任意取一点x_0，过x_0作x轴的垂面与柱体相交，如图9.5所示，所截得的截面面积为$S(x_0)$，由定积分得

$$S(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)}f(x_0,y)\mathrm{d}y,$$

从而对$[a,b]$上的任意一点x来讲，所对应的截面面积$S(x)$为

$$S(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(2) 求曲顶柱体的体积V.

根据“平行截面为已知的立体体积”的求法，得曲顶柱体的体积V是

$$V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

于是得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

另外上式还可以写成下面的形式

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

以上式子表明，二重积分可以转化成先对y后对x的二次积分来计算，并且二次积分的上下限就是该区域中所对应的x,y的最大值和最小值.

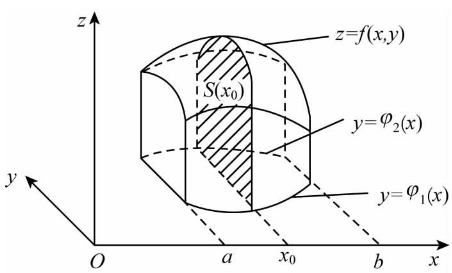

图 9.5

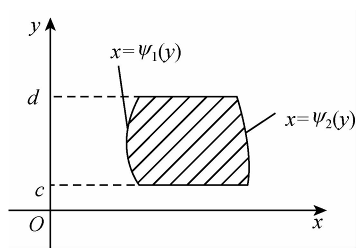

图 9.6

2. Y－型区域

设平面区域D由$x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)(\psi_2(y)\geqslant\psi_1(y))$以及直线$y=c$，$y=d$所围成，如图9.6所示. 称此区域$D$为$Y$－型区域.

Y－型区域D可表示成如下的不等式组：

$$D:\begin{cases}c\leqslant Y\leqslant d,\\ \psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y),\end{cases}.$$

该区域的特点是，平行于x轴且穿过区域D内部的直线与区域D的边界的交点不会超过两点.

依照对X－型区域的计算，此时二重积分可以转化成先对x后对y的二次积分来计算，

即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

3. 非 X－型或非 Y－型区域

当区域不满足 X－型或 Y－型区域的特点时，像图 9.7 所示的形状，我们需要将区域 D 分割成几块，在每一块上分别计算以后再将它们的值求和，就能得到区域 D 上的二重积分.

【例 1】 计算二重积分$\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 所围成的区域.

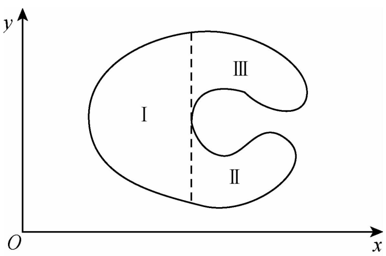

图 9.7

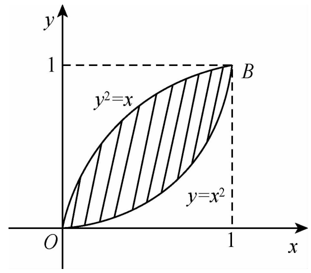

图 9.8

解 先画出区域 D 的草图，如图 9.8 所示.

将方程联立，解交点

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x, \end{cases}$$

得 $O(0,0)$ 和 $B(1,1)$.

此区域既可以看成是 X－型区域，又可以看成是 Y－型区域，即

$$D:\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}, \end{cases} \quad 或 \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, \end{cases}$$

于是

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 - x^5)\mathrm{d}x = \frac{1}{12};$$

或者有

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}yx^2\right]_{y^2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 (y^2 - y^5)\mathrm{d}y = \frac{1}{12}.$$

此题表明，当区域 D 既可以看成是 X－型区域，又可以看成是 Y－型区域时，我们可以选取一种去解，都会得到结果.

【例 2】 计算二重积分$\iint\limits_D (2y-x)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=x+2$ 所围成的区域.

解 画草图 9.9，联立方程解交点

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2, \end{cases}$$

得 $A(-1,1)$，$B(2,4)$.

于是区域 D 可以表示为

$$D:\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x^2 \leqslant y \leqslant x + 2, \end{cases}$$

则

$$\iint_D (2y - x)\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x+2}(2y - x)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{2}[y^2 - xy]_{x^2}^{x+2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}(-x^4 + x^3 + 2x + 4)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{243}{20}.$$

另外，此题如果将区域 D 表示成 $Y-$ 区域，则有

$$D_1:\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ -\sqrt{y} \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, \end{cases} \quad 和\ D_2:\begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 4, \\ y - 2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}, \end{cases}$$

且 $D = D_1 + D_2$，从而有

$$\iint_D (2y - x)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1}(2y - x)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2}(2y - x)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(2y - x)\mathrm{d}x + \int_1^4\mathrm{d}y\int_{y-2}^{\sqrt{y}}(2y - x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1\left[2yx - \frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y + \int_1^4\left[2yx - \frac{1}{2}x^2\right]_{y-2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{243}{20}.$$

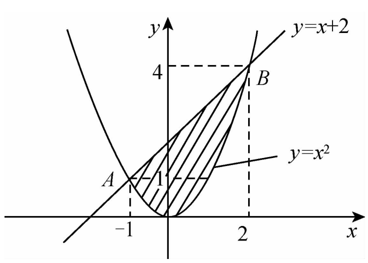

图 9.9

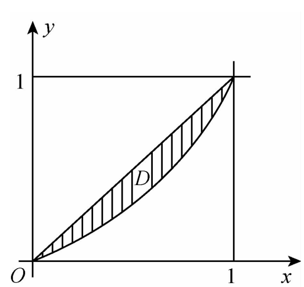

图 9.10

此题表明：区域类型的选定很重要，虽然每种类型都能将结果求出，但是选择的好坏与否，直接影响到解题的速度快慢. 从而在选用何种类型的区域时，尽量不要将区域分割，用尽可能少的不等式组来表示出区域.

【例 3】 计算二重积分$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域,如图 9.10 所示.

解 方程联立,解交点

$$\begin{cases} y=x, \\ y=x^2, \end{cases}$$

得(0,0),(1,1).

于是区域 D 可以表示为

$$D:\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x^2\leqslant y\leqslant x, \end{cases}$$

从而有

$$\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{\sin x}{x}(x^2-x)\right]\mathrm{d}x=1-\sin 1.$$

但是如果我们将区域表示成 $Y-$ 区域,即

$$D:\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1, \\ y\leqslant x\leqslant \sqrt{y}, \end{cases}$$

再去解该二重积分的话,相信大家是解不出来的,这是因为定积分$\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 中的被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的原函数不是初等函数,所以我们不可能将$\int_y^{\sqrt{y}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 求出值来.

此题表明:对有些二重积分来讲,区域类型的选择不仅要看它的形状,而且也要考虑被积函数的形式,只有这样才会使二重积分的计算更简捷有效.

【例 4】 计算二次积分$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$.

分析 由于函数 e^{y^2} 的原函数不是初等函数,所以积分$\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$不能直接求其结果,考虑到二重积分在化为二次积分时有两种不同的积分次序,既然先对 y 后对 x 不容易解答,我们是否可以换成先对 x 后对 y 进行积分呢?

解 由$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$ 知,该积分区域 D 可以表示成为

$$D:\begin{cases} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ x\leqslant y\leqslant 1, \end{cases}$$

如图 9.11 所示. 于是,区域 D 又可以表示成为

$$D:\begin{cases} 0\leqslant y\leqslant 1, \\ 0\leqslant x\leqslant y, \end{cases}$$

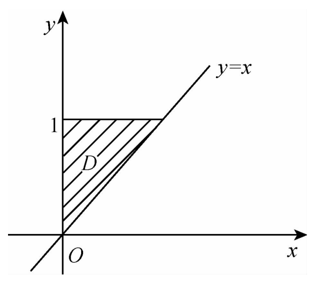

图 9.11

则有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 [x\mathrm{e}^{y^2}]_0^y \mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{y^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

此题表明：有些以二次积分形式给出的二重积分若按所给的积分次序积分较困难或者不能积分时，我们可以转换一下积分次序再求解.

9.2.2 在极坐标系下的计算

有些形如$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2=R^2$ 的$\frac{1}{4}$ 圆周，$\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 等的二重积分，如果在直角坐标系下进行计算，你会发现这是件非常困难和繁琐的事情，但如果改在极坐标系下进行计算情况就大不一样了. 下面，我们了解一下在极坐标系下怎样来计算二重积分.

1. 极坐标系

在平面内取一点 O，叫做极点，引入一条射线 Ox，叫做极轴，再选定一个长度单位和角度的正方向(通常取逆时针方向为正方向)，如图 9.12 所示. 对于平面内的任意一点 M，用 r 表示线OM 的长度，θ表示从Ox 到OM 的角度，其中 r 叫做点M 的极径，θ叫做点M 的极角. 有序数对(r,θ) 就叫做点 M 的极坐标. 这样一来就在平面上建立了点的坐标，同时建立的坐标系称为极坐标系.

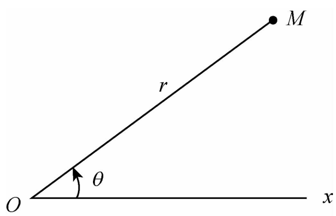

图 9.12

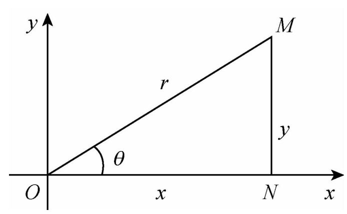

图 9.13

2. 直角坐标系与极坐标系的关系

把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极径，并在两种坐标系中取相同的长度单位，如图 9.13 所示.

设 M 是平面内的任意一点，它的直角坐标是(x,y)，极坐标是(r,θ)，则由三角函数的定义知

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,$$

上式称为直角坐标与极坐标的换算关系式.

3. 极坐标系下二重积分的计算

在极坐标系下，如果从极点出发且穿过积分区域 D 内部的射线与 D 的边界相交不多于

两点.我们可以用 r 取一系列常数(即一簇关于极点上同心圆)和 θ 取一系列常数(即一簇过极点的射线)形成一个曲线网格,将 D 分成许多小的区域,如图 9.14 所示.从而得到极坐标系下的面积微元 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$,如图 9.15 所示.于是二元积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 就转化为

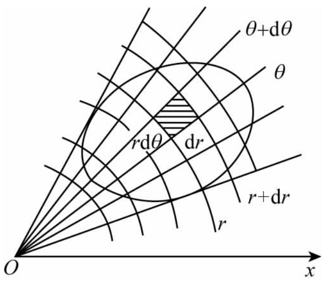

图 9.14

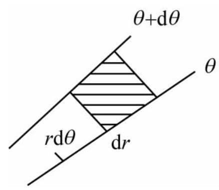

图 9.15

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

下面根据积分区域与极点的位置关系,将二重积分转化为相应的二次积分.

(1) 极点在区域的外部

像图 9.16 所示的形状,则区域 D 可以用如下的不等式组

$$\begin{cases} \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta), \end{cases}$$

来表示.

于是二重积分可化为

$$\iint\limits_{D} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r.$$

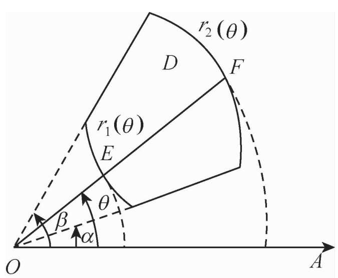

图 9.16

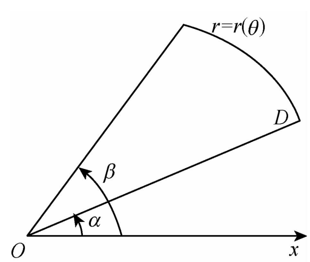

图 9.17

(2) 极点在两极径(该两极径恰为区域的边界)的交点上像图 9.17 所示的形状,则区域 D 可以用如下的不等式组

$$\begin{cases} \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ 0 \leqslant r \leqslant r(\theta), \end{cases}$$

来表示.

于是二重积分可化为

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

(3) 极点在区域内部

像图 9.18 所示的形状，则区域 D 可以用如下的不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\ 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\end{cases}$$

来表示.

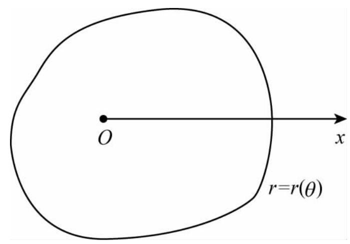

图 9.18

于是二重积分可化为

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

【例 5】 求二重积分$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x^2+y^2=1$ 及两坐标轴所围成的区域，如图 9.19 所示.

解 区域 D 可以用不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0\leqslant r\leqslant 1,\end{cases}$$

来表示，于是

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \ln(1+r^2)r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}(1+r^2)\ln(1+r^2)-\frac{r^2}{2}\right]_0^1\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

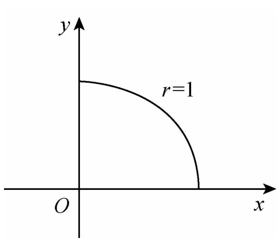

图 9.19

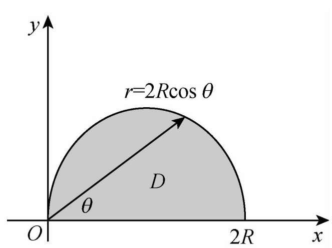

图 9.20

【例 6】 将二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$转化为极坐标系下的二次积分，其中 D 是由 $x^2+y^2\leqslant 2Rx$，$y\geqslant 0$ 围成的半圆形区域，如图 9.20 所示.

解 区域 D 可以用不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 0\leqslant r\leqslant 2R\cos\theta,\end{cases}$$

来表示，于是

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2R\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r.$$

【例 7】　求二重积分$\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$ 围成的圆环形区域，如图 9.21 所示.

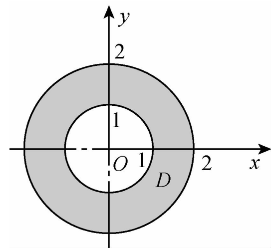

图 9.21

解　此区域 D 可以用不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\1\leqslant r\leqslant 2,\end{cases}$$

来表示，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma&=\iint\limits_D(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{d}r=\frac{15}{2}\pi.\end{aligned}$$

通过以上几个例子可以看出，利用极坐标计算二重积分时，积分区域一般是圆形、扇形、环形等，而且被积函数多含有 x^2+y^2、$\dfrac{y}{x}$ 等的形式.

习题 9.2

1. 将下列二重积分交换积分次序：

(1)$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$；　　(2)$\int_{-6}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{4}}^{2-x}f(x,y)\mathrm{d}y$；

(3)$\int_{-a}^0\mathrm{d}x\int_{-x}^a g(x,y)\mathrm{d}y+\int_0^{\sqrt{a}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^a g(x,y)\mathrm{d}y$.

2. 将下列二重积分转化成二次积分：

(1)$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D：由 $y=x$，$y=2-x$ 及 $y=0$ 所围成；

(2)$\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D：由 $y=\dfrac{1}{x}$，$y=x$ 及 $x=2$ 所围成.

3. 计算下列二重积分：

(1)$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所围成的区域；

(2)$\iint\limits_D(x+2y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D：由 $y=\dfrac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围成的区域；

(3)$\iint\limits_D\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：由 $y=x$ 及 $y=x^2$ 所围成的区域；

(4)$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D：由 $x^2+y^2\leqslant 4$ 所围成的区域.

4. 计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 1$；

(2) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \leqslant R^2$；

(3) $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: \pi^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$；

(4) $\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D: x^2+y^2 \leqslant 9, x^2+y^2 \geqslant 1, y \leqslant x$ 及 $y \geqslant 0$.

5. 改换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-2\arcsin y}^{\pi} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{\mathrm{e}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(4) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(5) $\int_{0}^{4}\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$；

(6) $\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{1} f(x,y)\mathrm{d}y$.

6. 证明：式子 $\int_{0}^{a}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a}(a-x)\mathrm{e}^{m(a-x)}f(x)\mathrm{d}x$ 成立.

9.3　三重积分

9.3.1　三重积分的概念

三重积分的概念,可以通过前面定积分和二重积分的概念推广而得到.

定义 9.2　设三元函数 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数. 将 Ω 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta v_1,\Delta v_2,\cdots,\Delta v_n,$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域,也表示它的体积. 在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i),作乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i(i=1,2,\cdots,n)$,并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$. 引入参数 λ(各小闭区域直径中的最大值),即 $\lambda=\max\{\Delta v_i\}$,如果和式的极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$ 存在,则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分. 记为 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$,即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i,$$

其中 $\mathrm{d}v$ 叫做体积微元.

类似于二重积分中面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 在直角坐标系中的分法,可以表示成 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,三重积分中的体积微元 $\mathrm{d}v$,如果用平行于坐标面的平面去截的话,此体积微元可以表示成 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,于是三重积分又可记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 叫做直角坐标系中的体积微元.

如果 $f(x,y,z)$ 表示某物体在点 (x,y,z) 处的密度,Ω 是该物体所占有的空间闭区域,并且 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续,则该物体的质量 m 就可以表示为

$$m=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

9.3.2　三重积分的计算

计算三重积分的方法,类似于二重积分,就是将三重积分转化成三次积分来解. 下面介绍几种在不同坐标系下如何计算三重积分的方法.

1. 在直角坐标系下的计算

假设平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 交点个数不超过两个. 于是把闭区域 Ω 投影到 xOy 坐标面上,得到一平面闭区域 D_{xy}(如图 9.22 所示). 以 D_{xy}

的边界为准线，作母线平行于 z 轴的柱面，该柱面与曲面 S 的交线从 S 中分为上、下两部分，其方程分别为

$$S_1: z = z_1(x,y),$$
$$S_2: z = z_2(x,y),$$

其中 $z_1(x,y)$，$z_2(x,y)$ 都是闭区域 D_{xy} 上的连续函数，且 $z_1(x,y) \leqslant z_2(x,y)$. 过 D_{xy} 内任一点 (x, y) 作平行于 z 轴的直线，该直线从曲面 $z_1(x,y)$ 穿入，从曲面 $z_2(x,y)$ 穿出，显然穿入点和穿出点的竖坐标应为 $z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$.

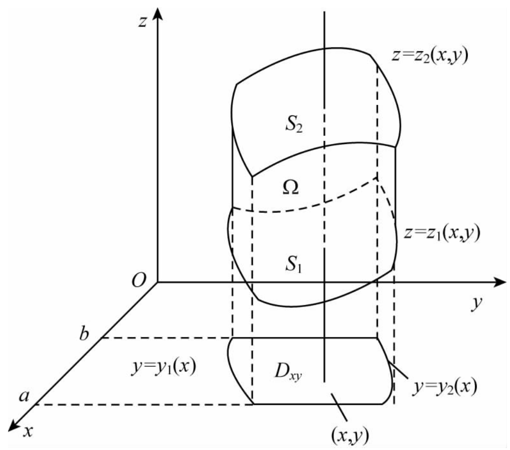

图 9.22

此情况下，闭区域 Ω 作为积分区域就可以表示为

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y), (x,y) \in D_{xy}\}.$$

先将 x，y 看做定值，将 $f(x,y,z)$ 只看做是 z 的函数，在区间 $[z_1(x,y), z_2(x,y)]$ 上对其积分，把结果记为 $F(x,y)$，于是得

$$F(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

然后计算 $F(x,y)$ 在闭区域 D_{xy} 上的二重积分

$$\iint_{D_{xy}} F(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\sigma.$$

如果闭区域 D_{xy} 能用以下不等式确定

$$D_{xy} = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\},$$

那么，三重积分计算公式就会得到如下形式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

说明　上述公式将三重积分转化成先对 z，再对 y，最后对 x 的三次积分.

当平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 交点个数多于两个时，类似于二重积分那样，可以把闭区域 Ω 分成若干部分，使其每一个部分能够满足："平行于 z 轴且穿过闭区域 Ω 内部的直线与闭区域 Ω 的边界曲面 S 交点个数不超过两个"，从而在每一部分上，将三重积分转化为三次积分来计算，最后求和.

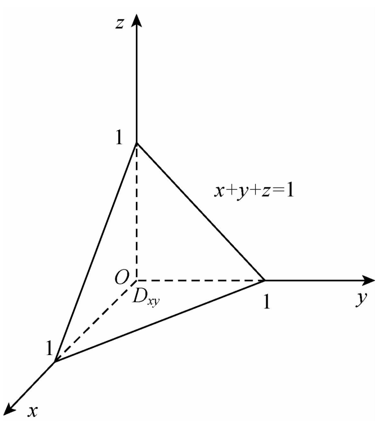

图 9.23

【例 1】　计算三重积分 $\iiint_{\Omega} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三个坐标面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的区域，如图 9.23 所示.

解 积分区域 Ω 有上表面 $z=1-x-y$，下表面 $z=0$，闭区域 Ω 在 xOy 坐标面上的投影区域为 D_{xy}，则闭区域 Ω 可以表示为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant z\leqslant 1-x-y\},$$

则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y(1-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left[\frac{y^2}{2}(1-x)-\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

2. 在柱面坐标系下的计算

设点 $M(x,y,z)$ 是空间中的一点，并设该点在 xOy 坐标面上的投影 P 的极坐标为 (r,θ)，则这样的三个数 r,θ,z 就叫做点 M 的柱面坐标(如图 9.24 所示). 这里规定 r,θ,z 的变化范围为

$$\begin{cases}0\leqslant r<+\infty,\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\\-\infty<z<+\infty,\end{cases}$$

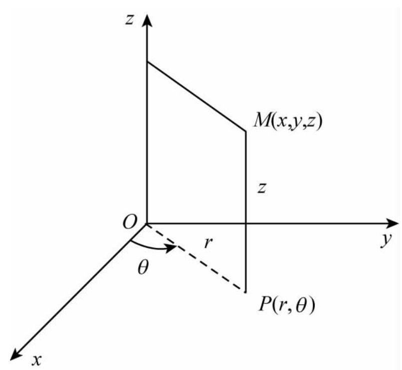

图 9.24

三组坐标面分别为

r 为常数，表示以 z 轴为轴的圆柱面；

θ 为常数，表示过 z 轴的半平面；

z 为常数，表示垂直于 z 轴的平面.

于是，点 M 的直角坐标与柱面坐标的关系为

$$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\\z=z.\end{cases}$$

在柱面坐标系下，三重积分的体积微元 $\mathrm{d}v$ 可以用上面的三组坐标面将闭区域 Ω 进行分割，从而得到柱面坐标系下体积微元为

$$\mathrm{d}v=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

如图 9.25 所示. 此小体积等于底面积 $\mathrm{d}\sigma$ 乘以高 $\mathrm{d}z$，而底面积 $\mathrm{d}\sigma$ 其实是在极坐标系下的面积微元 $r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

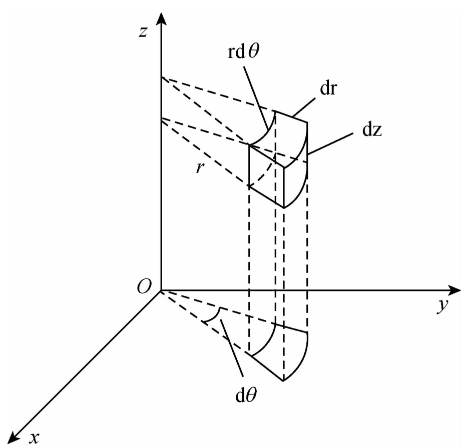

图 9.25

于是得到，三重积分在柱面坐标系的计算公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z.$$

依照前边对直角坐标系下，将三重积分转化为三次积分的方法，如果闭区域 Ω 在 xOy 坐标面上的投

影 D_{xy} 可以用极坐标不等式组表示为

$$\begin{cases}\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta, \\ r_1(\theta) \leqslant r \leqslant r_2(\theta),\end{cases}$$

且 Ω 的上、下表面为 $z_2(r,\theta)$，$z_1(r,\theta)$ 时，那么该三重积分就可以表示成如下的三次积分：

$$\int_{\alpha}^{\beta} \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\mathrm{d}r \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z.$$

【例 2】 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由柱面 $x^2+y^2=9$ 以及坐标面 $x=0$，$y=0$ 和平面 $z=1$，$z=2$ 所围成的在第一卦限中的空间闭区域，如图 9.26 所示.

解 空间闭区域 Ω 用柱面坐标系可以表示为

$$\Omega = \left\{(r,\theta,z) \middle| 0 \leqslant r \leqslant 3, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 1 \leqslant z \leqslant 2\right\},$$

于是有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}v &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^3 r\mathrm{d}r \int_1^2 r^2 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^3 r^3\,\mathrm{d}r = \frac{81}{8}.\end{aligned}$$

当积分区域 Ω 在 xOy 坐标面上的投影是圆形、环形、扇形或扇环，被积函数为含有 $x^2+y^2\left(\text{或}\dfrac{y}{x}、\dfrac{x}{y}\right)$ 与 z 的复合函数时，用柱面坐标计算该三重积分可能比较方便一些.

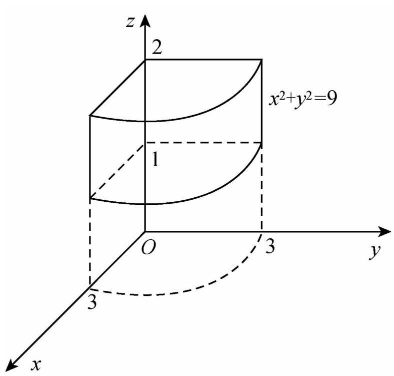

图 9.26

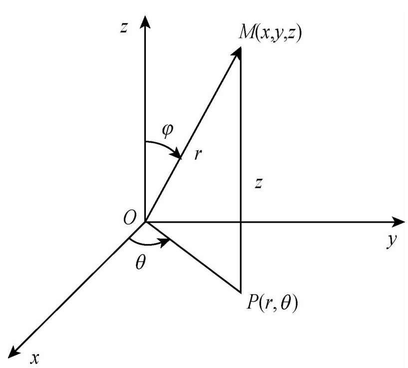

图 9.27

3. 在球面坐标系下的计算

设点 $M(x,y,z)$ 是空间内一点，如果该点可以用这样三个有序数 r,φ,θ 来确定，其中 r 为原点到点 M 间的距离；φ 为有向线段 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正向所成的角；θ 与柱面坐标系中的 θ 有相同的含义，如图 9.27 所示，图中的点 P 是点 M 在 xOy 坐标面内的投影. 于是这三个有序数 r,φ,θ 就可以叫做点 M 的球面坐标，它们三者的变化范围是

$$\begin{cases} 0 \leqslant r < +\infty, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

三组坐标面分别为

r 为常数，表示以原点为心的球面；

φ 为常数，表示以原点为顶点，以 z 轴为轴的圆锥面；

θ 为常数，表示过 z 轴的半平面.

结合图 9.27，我们不难得出，点 M 的直角坐标与球面坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

为了把三重积分中的变量从直角坐标变换为球坐标，我们还要将积分区域利用上述三组坐标面将其分成许多小的闭区域，从而得出积分微元，如图 9.28 所示，此微元是一个长方体，它的三条棱分别是 $\mathrm{d}r$，$r\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta$，$r\mathrm{d}\varphi$，于是该体积微元表示为

$$\mathrm{d}v = r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

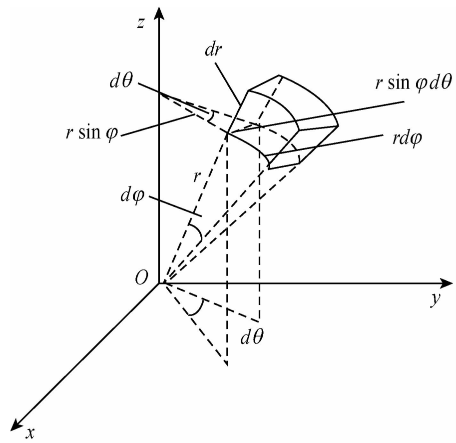

图 9.28

于是得到，三重积分在球面坐标系的计算公式为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

上述公式告诉我们，要计算三重积分，可把它转化为先对 r，再对 φ,θ 的三次积分.

例如，如果积分区域 Ω 的边界曲面是一个包围原点在内的闭曲面，其球面坐标方程为 $r=r(\varphi,\theta)$，则该三重积分为

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

当积分区域 Ω 为球面 $r=a$ 所围成时，则该三重积分为

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r.$$

特别地，当被积函数为 1 时，于是所求得的球体体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a} r^2\,\mathrm{d}r = 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3, \end{aligned}$$

这是我们所熟知的结果.

【例3】 求由球面 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 和半顶角为 α，以 z 轴为轴的圆锥面所围成的几何体的体积，如图 9.29 所示.

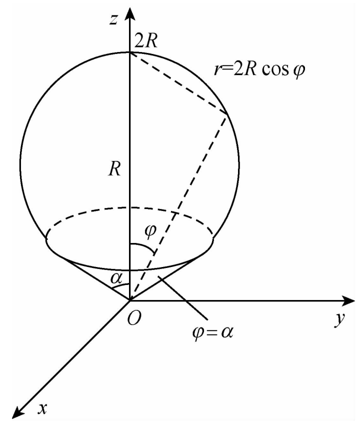

图 9.29

解 因为球面过原点，并且球心在 z 轴上，则球面方程为 $r=2R\cos\varphi$，锥面方程显然为 $\varphi=\alpha$，根据题意知，该圆锥面的顶点在原点，对称轴是 z 轴，故二者所围成的几何体是一个空间闭区域 Ω，此区域可以用不等式组表示为

$$\begin{cases}0\leqslant r\leqslant 2R\cos\varphi,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

于是所求几何体的体积为

$$\begin{aligned}V&=\iiint_{\Omega}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{16\pi R^3}{3}\int_0^{\alpha}\sin\varphi\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\&=\frac{4\pi R^3}{3}(1-\cos^4\alpha).\end{aligned}$$

习题 9.3

1. 选择适当的坐标系计算下列三重积分.

(1) $\iiint\limits_{\Omega}xz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中闭区域 Ω 是由平面 $z=0$，$z=y$，$y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的区域；

(2) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$，其中闭区域 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 以及三个坐标平面所围成的四面体；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 以及平面 $z=2$ 所围成的区域；

(4) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的区域；

(5) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 是由两个半球面 $z=\sqrt{b^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(0<a<b)$ 所围成的区域；

(6) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中闭区域 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 以及平面 $z=5$ 所围成的区域.

2. 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为三次积分，其中积分闭区域 Ω 分别为：

(1) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域；

(2) 由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 以及曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域；

(3) 由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 所围成的闭区域.

3. 利用三重积分计算由下列曲面所围成的几何体的体积：

(1) 由曲面 $z=6-x^2-y^2$ 和平面 $z=2$；

(2) 由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲面 $z=x^2+y^2$.

4. 求球体 $r\leqslant R$ 位于两个圆锥面 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\varphi=\frac{2\pi}{3}$ 之间的部分的体积.

9.4 重积分的应用

从前面的讨论中，我们知道曲顶柱体的体积可以用二重积分来求解，空间体的体积可以用三重积分来求解，本节对二重积分和三重积分在几何和物理上介绍一些其他的应用.

9.4.1 在几何上的应用

1. 求曲面的面积

设曲面 S 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，D 为曲面 S 在 xOy 面上的投影区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上具有连续偏导数 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$，现要计算曲面 S 的面积 A.

在 D 上任取一很小的闭区域 $\mathrm{d}\sigma$，并记该区域的面积为 $\mathrm{d}\sigma$，在 $\mathrm{d}\sigma$ 上任一点 $P(x,y)$，对应于曲面 S 上有一点 $M(x,y,f(x,y))$，点 M 在 xOy 坐标面上的投影点即为 P. 点 M 处的曲面 S 的切平面为 T，如图 9.30 所示. 以小区域 $\mathrm{d}\sigma$ 的边界为准线，作母线平行于 z 轴的柱面切平面 T 一小区域 $\mathrm{d}A$，用该区域近似代替相应曲面上截得的小区域的面积.

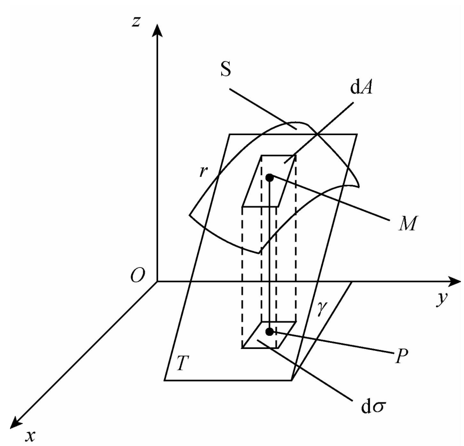

图 9.30

设点 M 处曲面 S 上的法向量与 z 轴的夹角为 γ，则

$$\mathrm{d}A=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\cos\gamma},$$

又因为

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}},$$

即

$$\mathrm{d}A=\sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma,$$

上式就是所求曲面的面积微元，于是所求曲面的面积为

$$A=\iint_D\sqrt{1+f'^2_x(x,y)+f'^2_y(x,y)}\,\mathrm{d}\sigma.$$

上式通常也写成

$$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【例 1】 求半径为 R 的球的表面积.

解 根据球面的对称性，只要求出球面在第 Ⅰ 卦限的表面积 A_1，然后再乘以 8 倍，即为所求球面的表面积.

在第 Ⅰ 卦限中，球面方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，它在第一象限中的投影区域 D 为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

由于 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$，于有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

利用极坐标，得

$$A_1=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}R^2,$$

所以，所求球面的表面积为

$$A=8A_1=4\pi R^2.$$

2. 求几何体的体积

由二重积分的几何意义可知，二重积分可以表示某一曲顶柱体的体积，所以利用二重积分可以求立体的体积.

【例 2】 求两圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 和 $x^2+z^2=R^2$ 正交所围成的立体的体积.

解 由该立体对坐标面的对称性知，所求体积 V 是它在第 Ⅰ 卦限部分，如图 9.31(1) 所示部分的 8 倍. 而在第 Ⅰ 卦限内的立体体积 V_1 是以 $z=\sqrt{R^2-x^2}$ 为顶，以积分区域 D：$0\leqslant x\leqslant R,0\leqslant y\leqslant\sqrt{R^2-x^2}$ 为底的曲顶柱体的体积，如图 9.31(2) 所示.

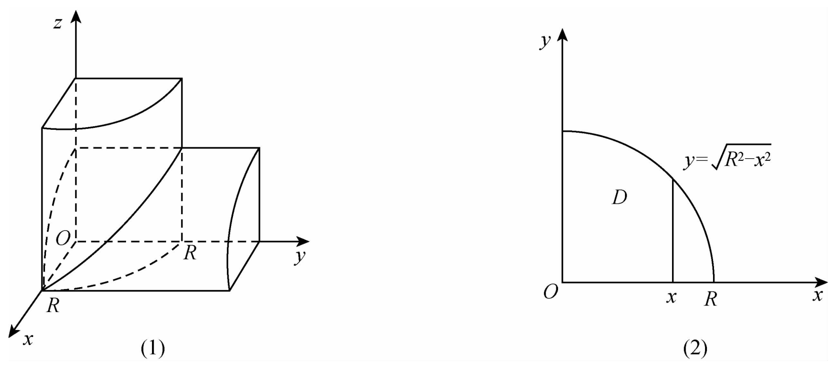

图 9.31

于是

$$V_1=\iint_D\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}\sigma=\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^R(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=\frac{2}{3}R^3,$$

因此，所求立体的体积 V 是

$$V=8V_1=\frac{16}{3}R^3.$$

【例 3】 求由两旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$ 与 $z=x^2+y^2$ 所围的体积.

解 根据前面的知识,我们可以画出该立体的草图 9.32.该几何体在 xOy 坐标面上的投影方程是

$$\begin{cases} z=2-x^2-y^2, \\ z=x^2+y^2, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} z=1, \\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

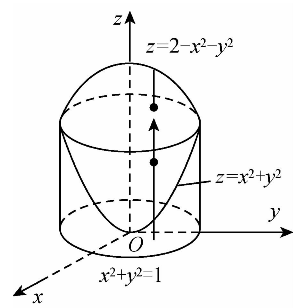

图 9.32

从而得到该曲线在 xOy 坐标面上所围成的域 D 为:$x^2+y^2\leqslant 1$.

于是,该立体的体积 V 可以看做是以 $z=2-x^2-y^2$ 为曲顶,以区域 D 为底所构成的曲顶柱体的体积 V_1 与以 $z=x^2+y^2$ 为曲顶,以区域 D 为底所构成的曲顶柱体的体积 V_2 的差.即

$$V=V_1-V_2,$$

所以有

$$V=\iint_D(2-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma-\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=2\iint_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

区域 D 可以用不等式组

$$\begin{cases} 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, \\ 0\leqslant r\leqslant 1, \end{cases}$$

来表示,于是有

$$V=2\iint_D(1-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\pi.$$

9.4.2 在物理上的应用

在这里我们只介绍利用二重积分来计算薄片的质量和质心两个问题.

1. 求平面薄片的质量

设平面上的某一薄片,在平面 xOy 上占有有界闭区域 D,且在点 $P(x,y)$ 处的面密度为 $\rho(x,y)$,由二重积分的定义知,该薄片的质量 M 为

$$M=\iint_D\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

上式称为薄片质量计算公式.

类似地,当三元函数 $f(x,y,z)$ 所表示的物体在点 (x,y,z) 处的密度函数为 $\rho(x,y,z)$,并且 $\rho(x,y,z)$ 在空间闭区域 Ω 上连续,则该物体的质量 M 为

$$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

【例 4】　设圆心在原点,半径为 2,面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$ 的薄片的质量.

解　设该薄片的质量为 M,则

$$M=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

其中,区域 D:$x^2+y^2\leqslant 4$,由极坐标的计算公式,得

$$M=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=8\pi.$$

2. 求平面薄片的质心

所谓质心就是质点的质量中心.

设平面薄片在 xOy 面上占有有界闭区域 D,且在点 $P(x,y)$ 处的面密度为 $\rho(x,y)$($\rho(x,y)$ 在 D 上是连续函数),根据物理学上有关静力矩的知识和微积分思想,则该薄片的质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$ 可表示为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\mathrm{d}\sigma},$$

上式称为质心计算公式.

当薄片的面密度均匀、面积为 S 时,薄片的质心计算公式可简记为

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{S}\iint\limits_D x\,\mathrm{d}\sigma,\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{1}{S}\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma,$$

此时的质心就是平面图形的中心.

【例 5】　求位于两圆周 $x^2+(y-2)^2=4$ 和 $x^2+(y-1)^2=1$ 之间的均匀薄片的质心.

解　建立如图 9.33 所示的坐标系.

由于该薄片的面密度是均匀的,所以它的质心必在 y 轴上,即 $\bar{x}=0$.

又因为该薄片的面积 S 为

$$S=4\pi-\pi=3\pi,$$

该薄片在坐标面上所占区域 D 用不等式组表示为

$$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant\pi,\\ 2\sin\theta\leqslant r\leqslant 4\sin\theta,\end{cases}$$

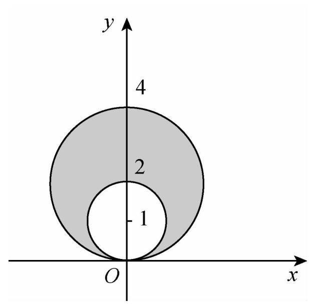

图 9.33

于是,由质心计算公式,得

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\\&=\frac{112}{9\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta=\frac{112}{9\pi}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

类似地，占有空间有界闭区域 Ω，在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$（假定密度函数 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上连续）的物体的质心坐标是

$$\bar{x}=\frac{\iint_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma},\bar{y}=\frac{\iint_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma},\bar{z}=\frac{\iint_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma}{\iint_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}\sigma}.$$

习题 9.4

1. 求曲面 $z=1-4x^2-y^2$ 与 xoy 坐标面所围成的立体的体积.

2. 求由四个平面 $x=0,y=0,x=1$ 及 $y=1$ 所围成的柱面被两平面 $z=0$ 与 $z=3-x+y$ 截得的立体的体积.

3. 求曲面 $z=4-x^2,y+2x-4=0,x=0,y=0$ 及 $z=0$ 所围成的立体在第 Ⅰ 卦限部分的体积.

4. 求由圆锥面 $z=4-\sqrt{x^2+y^2}$ 与旋转抛面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 所围成的立体的体积.

5. 半径为 1 的半圆形薄片，其上任意点处的面密度等于该点到圆心距离的平方，求此半圆形薄片的质量.

6. 设平面薄片所占的区域 D 是由螺线 $r=2\theta$ 上的一段弧 $\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 所围成，并且它的面密度是 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

7. 有一密度不均匀的长方体物体，它的空间区域 Ω 为：$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant z\leqslant 1$，该物体上在点 (x,y,z) 处的体密度为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，试求该物体的质量.

8. 求均匀上半球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0$ 的质心.

9. 求由直线 $y=a-x,x=0$ 及 $y=0$ 所围成的均匀薄片的重心.

10. 求圆环形 $2\sin\theta\leqslant r\leqslant 4\sin\theta$ 均匀薄片的重心.

复习题 9

1. 填空题：

(1) 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

(2) 二重积分 $\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的值依赖于________ 和________.

(3) 二次积分 $\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 化为极坐标系下的二次积分是________.

(4) 设 D 是由 $|x\pm y|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 所围成的有界闭区域，则 $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

(5) 将二重积分 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{0}^{1+x}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序得________.

2. 选择题:

(1) 设 $I=\iint\limits_{D}\sqrt[3]{1-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$ 所围成的闭区域,则必有(　　).

A. $I\geqslant 0$;　　B. $I\leqslant 0$;

C. $I=0$;　　D. $I\neq 0$ 但是符号有正有负.

(2) 如果 $\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$,其中 D 有可能是由(　　)所围成的闭区域.

A. $y=\dfrac{1}{2}x+1,x=0$ 及 $y=0$;　　B. $|y\pm x|=1$;

C. $|x|=1$ 及 $|y|=1$;　　D. $y=x-1,x=0$ 及 $y=0$.

(3) 设 D 是环形区域:$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$,则二重积分 $\iint\limits_{D}\arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. $\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{1}^{4}\theta\mathrm{d}r$;　　B. $\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{1}^{2}\theta\mathrm{d}r$;

C. $\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{1}^{4}\theta r\mathrm{d}r$;　　D. $\int_{0}^{2\pi}\theta\mathrm{d}\theta\int_{1}^{2}r\mathrm{d}r$.

(4) 设 D 是由 $2.7\leqslant x\leqslant 3,0.1\leqslant y\leqslant 0.5$ 所围成的闭区域,$I_1=\iint\limits_{D}\ln^2(x+y)\mathrm{d}\sigma,I_2=\iint\limits_{D}\ln^3(x+y)\mathrm{d}\sigma$,则下面的不等式成立的是(　　).

A. $I_1\geqslant I_2$;　　B. $I_1>I_2$;　　C. $I_1\leqslant I_2$;　　D. $I_1<I_2$.

(5) 设 $f(x,y)$ 为区域 D 上的连续函数,则将二次积分 $\int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序,得(　　).

A. $\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{0}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$;　　B. $\int_{0}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_{x}^{\sqrt{2x}}f(x,y)\mathrm{d}x$;

C. $\int_{0}^{2}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$;　　D. $\int_{2}^{0}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2}}^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$.

(6) 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,z\geqslant 0\}$,$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$,则有(　　).

A. $\iiint\limits_{\Omega_1}x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}x\mathrm{d}v$;　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1}y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}y\mathrm{d}v$;

C. $\iiint\limits_{\Omega_1}z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}z\mathrm{d}v$;　　D. $\iiint\limits_{\Omega_1}xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2}xyz\mathrm{d}v$.

(7) 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$,$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a,x\leqslant y\leqslant a\}$,则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. 0；　　B. $2\iint\limits_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

C. $2\iint\limits_{D_1} \cos x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　　D. $4\iint\limits_{D_1} (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(8) 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$（　　）.

A. $f(2)$；　　B. $-f(2)$；　　C. $2f(2)$；　　D. 0.

3. 计算题：

(1) $\iint\limits_D \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：是由 $y=2x$，$y=x$，$x=2$ 及 $y=4$ 所围成的闭区域；

(2) $\iint\limits_D x^2 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：是由 $y=x$，$x=0$ 及 $y=1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D：是由 $x^2+y^2\leqslant 1$ 所围成的闭区域；

(4) $\iint\limits_D xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D：是由 $0\leqslant x\leqslant \sqrt{4-y^2}$ 所围成的闭区域.

4. 交换下列二次积分的积分次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\mathrm{e}^y}^{e} f(x,y)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 g(x,y)\mathrm{d}x$；

(4) $\int_0^e \mathrm{d}y\int_1^2 g(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \mathrm{d}y\int_{\ln y}^2 g(x,y)\mathrm{d}x$.

5. 设平面上某一薄片所占闭区域 D 是由直线 $y=-x+2$，$y=x$ 及 $y=0$ 所围成的，已知该薄片的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

6. 半径为 1 的半圆形薄片，其上任意点处的面密度等于该点到圆心距离的平方，求此半圆形薄片的重心.

7. 计算下列三重积分：

(1) $\iiint\limits_\Omega z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由两个半球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz\,(R>0)$ 所围成的部分；

(2) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$，其中 Ω 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域；

(3) $\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 Ω 是由 xOy 坐标平面内曲线 $y^2=2x$ 绕 x 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的区域.