第一章　极限与连续

在解决实际问题时，需要研究变量的变化趋势.例如，当自变量无限接近于某个常数时，函数无限接近于什么？这就需要极限理论.极限理论是微积分学的基本推理工具，微积分学中的很多概念和定理都是用极限方法推导出来的.本章将主要介绍极限与连续的基本概念，以及它们的一些性质，为进一步学好微积分打下基础.

第一节　函　数

一、函数的概念

1.函数的定义

定义 1.1　设 D 是由数组成的集合.如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值和它对应，那么将对应法则 f 称为在 D 上 x 到 y 的一个**函数**，记作 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数的**定义域**.

当 x 取 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的**函数值**，记作 $f(x_0)$.当 x 取遍 D 中的一切数时，对应的函数值集合 $M=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

在函数的定义中，如果对于每一个 $x\in D$，都有唯一的 y 与它对应，那么这种函数称为**单值函数**；若同一个 x 值可以对应多于一个的 y 值，那么这种函数称为**多值函数**.例如，由方程 $x^2+y^2=9$ 所确定的以 x 为自变量的函数 $y=\pm\sqrt{9-x^2}$ 是一个多值函数，而它的每一个"分支" $y=\sqrt{9-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{9-x^2}$ 都是单值函数.以后如果没有特别说明，所说的函数都是指单值函数.

2.函数的表示法

(1) 表格法

表格法是指将自变量的值与对应的函数值列成表格表示两个变量的函数关系的方法，如三角函数表、常用对数表等.

(2) 图象法

图象法是指用图象表示两个变量的函数关系的方法，如图 1-1 所示.

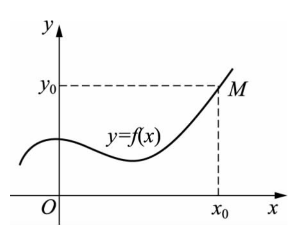

图 1-1

(3) 解析法

解析法是指用一个等式表示两个变量的函数关系的方法，如 $y=x+3$，$y=\lg(x+2)$等.

3.函数的定义域

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义确定.当不考虑函数的实际意义，而仅就抽象的解析式来研究函数时，这时定义域就取使解析式有意义的自变量的全体.要使解析式有意义，我们通常考虑以下几点：

(1)分式的分母不能为零；

(2)偶次根式的被开方数必须为非负数；

(3)对数式中的真数必须大于零；

(4)幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数考虑各自的定义域；

(5)若函数表达式由几个数学式子组成，则其定义域应取各部分定义域的交集；

(6)分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

【例 1.1】 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x<0,\\ 3, & 0\leqslant x<1,\\ \ln(2x-1), & x\geqslant 1,\end{cases}$

求 $f(-3)$，$f\left(\frac{1}{3}\right)$，$f(1+h)$.

【解】 $f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$，

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=3,$$

$$f(1+h)=\begin{cases}\sqrt{1-(1+h)}, & 1+h<0,\\ 3, & 0\leqslant 1+h<1,\\ \ln[2(1+h)-1], & 1+h\geqslant 1,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sqrt{-h}, & h<-1,\\ 3, & -1\leqslant h<0,\\ \ln(1+2h), & h\geqslant 0.\end{cases}$$

【例 1.2】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x+1}$；　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

【解】 (1) 若使函数有意义，则 $x^2+2x+1\neq 0$，即$(x+1)^2\neq 0$，$x\neq -1$.所以函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(2) 若使函数有意义，则$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\ x^2-1>0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ x>1 \text{ 或 } x<-1,\end{cases}$解得 $1<x\leqslant 2$ 或 $-2\leqslant x<-1$.所以函数的定义域为$[-2,-1)\cup(1,2]$.

二、函数的几种特性

1.奇偶性

定义 1.2　设函数的定义域 D 关于原点对称.如果对于任意的$x\in D$,$f(-x)=-f(x)$，那么 $f(x)$为**奇函数**;如果对于任意的 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$,那么 $f(x)$为**偶函数**.否则 $f(x)$为非奇非偶函数.

奇函数的图象关于原点对称,如图 1-2 所示;偶函数的图象关于 y 轴对称,如图1-3所示.

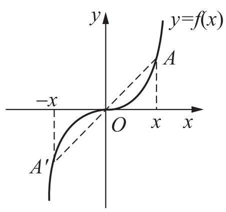

图 1-2

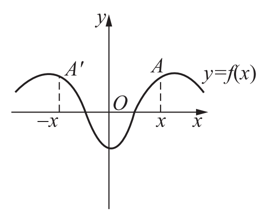

图 1-3

注意　在判断函数的奇偶性时,一定要先考虑函数的定义域是否关于原点对称.

【例 1.3】　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^2$;　　(2) $f(x)=2\sin 2x$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

【解】　(1) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,所以 $f(x)=x^2$ 是偶函数.

(2) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=2\sin(-2x)=-2\sin 2x=-f(x)$,所以 $f(x)=2\sin 2x$ 是奇函数.

(3) 因为 $f(x)$的定义域是 $D=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,定义域不关于原点对称,所以 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$是非奇非偶函数.

(4) 因为 $f(x)$的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$是关于原点对称的区间,又因为对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$,都有 $f(-x)=\sqrt{(-x)^2+1}=\sqrt{x^2+1}=f(x)$,所以 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$是偶函数.

2.单调性

定义 1.3　若对于区间 D 内任意的两点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,那么 $f(x)$在区间 D 上单调递增,区间 D 称为**单调增区间**;特别地,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$为 D 上的**严格增函数**.如果当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,那么 $f(x)$在区间 D 上单调递减,区间 D 称为**单调减区间**;特别地,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,

则称 $f(x)$ 为 D 上的**严格减函数**.

单调递增函数的图象沿 x 轴正向上升，如图 1-4 所示；单调递减函数的图象沿 x 轴正向下降，如图 1-5 所示.

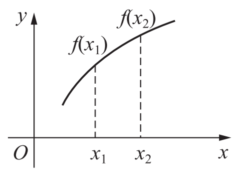

图 1-4

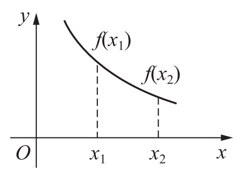

图 1-5

【例 1.4】 求证 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递增函数.

【证明】 设 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2),$$

因为 x_1、$x_2\in[0,+\infty)$，$x_1<x_2$，所以

$$x_1+x_2>0, x_1-x_2<0,$$

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调递增函数.

3. 有界性

定义 1.4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有上界**，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**（任何大于 K_1 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的上界）；如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有下界**，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**（任何小于 K_2 的数也是 $f(x)$ 在 X 上的下界）；如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任意 $x\in X$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**；如果这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**；这就是说，如果对于任何正数 M，总存在 $x_1\in X$，使 $|f(x_1)|>M$，那么函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

【例 1.5】 就函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界）. 因

$$|\sin x|\leqslant 1$$

对任一实数 x 都成立，故函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的. 这里 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何数作为 M 而使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立）.

4. 周期性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 对于任意的 $x\in D$，如果存在不为零的数 T，使 $f(x+T)=f(x)$，那么 $f(x)$ 为 D 上的**周期函数**. T 称为函数的一个**周期**，并且 nT（n 为非零整数）也是它的周期. 平时，我们把函数的最小正周期称为函数的周期.

【例 1.6】 函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数. $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象分别如图 1-6 和图 1-7 所示.

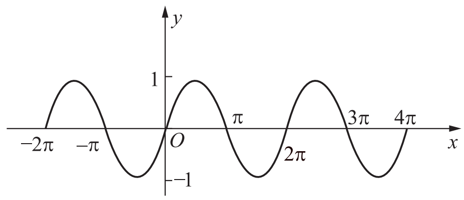

图 1-6

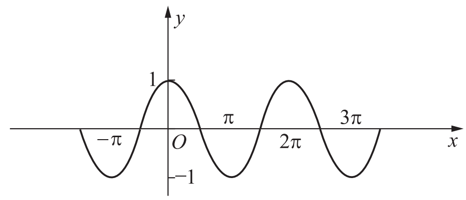

图 1-7

三、初等函数

1. 基本初等函数

视频

初等函数

我们把常数函数 $y=c$(c 为常数)、幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数)、指数函数 $y=a^{x}$($a>0,a\neq1,a$ 为常数)、对数函数 $y=\log_{a}x$($a>0,a\neq1,a$ 为常数)、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

2. 复合函数

定义 1.6 若函数 $y=f(u),u=g(x)$,且 $u=g(x)$的值域或部分值域包含在 $f(u)$的定义域中,则变量 y 通过变量 u 与变量 x 建立了对应关系,这个对应关系称为 **y 是 x 的复合函数**,u 是**中间变量**,x 是**自变量**,通常将

$$y=f(u),\quad u=g(x)$$

合并写成

$$y=f[g(x)].$$

例如,$y=\sin^2 x$ 就是由 $y=u^2,u=\sin x$ 复合而成的,这个复合函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,它也是 $u=\sin x$ 的定义域.

同样地,$y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=1-x^2$ 复合而成的,这个复合函数的定义域为$[-1,1]$,它只是 $u=1-x^2$ 的定义域$(-\infty,+\infty)$的一部分.

注意 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的;复合函数也可以由两个以上的函数经过复合构成.

【例 1.7】 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\cos^2 x$;　　　　(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$.

【解】 (1) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2,u=\cos x$ 复合而成的.

(2) $y=\sqrt{x^2+2x}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=x^2+2x$ 复合而成的.

【例 1.8】 设 $f(x)=x^2,g(x)=\log_2 x$,求 $f[g(x)],g[f(x)],f[f(x)]$.

【解】
$$f[g(x)]=(\log_2 x)^2=\log_2^2 x;$$
$$g[f(x)]=\log_2 f(x)=\log_2 x^2=2\log_2|x|;$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2=(x^2)^2=x^4.$$

3. 初等函数

定义 1.7 基本初等函数(常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数)经过有限次的加、减、乘、除(分母不为零)的四则运算,以及有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,叫作**初等函数**.

例如,函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\log_2(2-x)}$ 是一个初等函数.

又如,函数 $y=x^x$,由于 $x^x=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$,因此
$$y=x^x=e^{x\ln x}$$
是由 $y=e^u$,$u=x\ln x$ 复合而成的函数,因而它也是一个初等函数.

如果一个函数必须用几个式子表示,那么它就不是初等函数. 例如,函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & x>1\end{cases}$ 就不是初等函数,我们将这样的函数叫作**非初等函数**.

第二节 极限的概念

一、数列的极限

以前我们已经学过数列的概念,现在来考查当项数 n 无限增大时,无穷数列 $\{a_n\}$ 的变化趋势. 我们先看一个实例:一个篮球从距地面 1 m 高处自由下落,受地心引力及空气阻力的作用,每次触地后篮球又反弹到前一次高度的 $\frac{1}{2}$ 处(见图 1-8). 于是,可得到表示篮球高度的一个数列

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2^{n-1}},\cdots \tag{1-1}$$

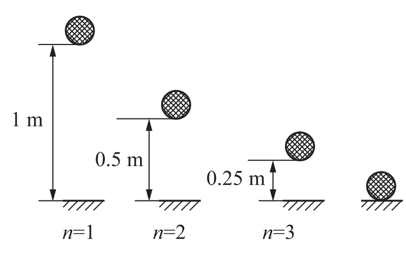

图 1-8

我们知道,篮球最终会停在地面上,即反弹高度 $h=0$,这说明,随着反弹次数 n 的无限增

大，数列通项 $h_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$的值将趋向于 0.

现在，再来看两个无穷数列：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots \tag{1-2}$$

$$0,\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{5}{4},\cdots,\frac{n+(-1)^n}{n},\cdots \tag{1-3}$$

为便于观察，在平面直角坐标系中作出数列(1-2)和(1-3)的图形. 从图 1-9 中可看出，当 n 增大时，点(n,a_n)从横轴上方无限接近于直线 $a_n=0$. 这表明，当 n 无限增大时，数列通项 $a_n=\dfrac{1}{n}$的值无限趋近于零.

同样，从图 1-10 中可看出，当 n 增大时，点(n,a_n)从上、下两侧无限接近于直线 $a_n=1$. 这表明，当 n 无限增大时，数列通项 $a_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$的值无限趋近于常数 1.

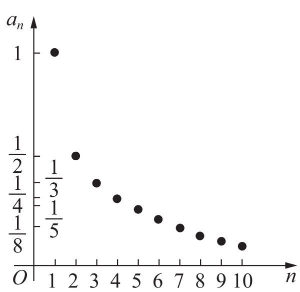

图 1-9

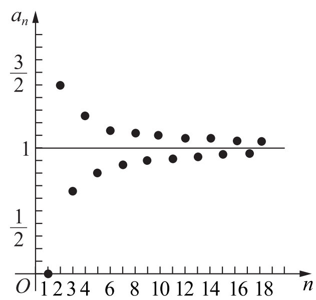

图 1-10

上述数列的变化趋势具有相同的特点：当 n 无限增大时，数列的项 a_n 无限趋近于某个常数 A.

定义 1.8 如果无穷数列$\{a_n\}$的项数 n 无限增大时，a_n 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫作**数列$\{a_n\}$的极限**(limit). 记作

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \text{ 或 } a_n\to A \quad (\text{当 } n\to\infty \text{ 时}).$$

读作“当 n 趋向于无穷大时，数列$\{a_n\}$的极限等于 A”.

★ 视频

数列极限定义

根据定义，上面三个数列的极限分别记作

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0；\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0；\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+(-1)^n}{n}=1.$$

【例 1.9】 判断下面数列是否有极限，如果有，写出它的极限.

(1) $-2,-2,-2,\cdots,-2,\cdots$；

(2) $-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\frac{1}{16},\cdots,(-1)^n\frac{1}{2^n},\cdots$；

(3) $1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots$.

【解】（1）这个数列是常数数列，通项 $a_n=-2$，数列的极限是 -2，即

$$\lim_{n\to\infty}(-2)=-2.$$

（2）这个数列是公比 $q=-\frac{1}{2}$ 的等比数列，通项 $a_n=(-1)^n\frac{1}{2^n}$，可以看出，当 n 无限增大时，$(-1)^n\frac{1}{2^n}$ 无限趋近于 0，即

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0.$$

（3）当 n 无限增大时，$a_n=n^2$ 也无限增大，不能趋近于一个确定的常数，因此，这个数列没有极限.

由此例，可得下面的结论：

$$\lim_{n\to\infty}C=C \quad (C\text{ 为常数})；$$

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0 \quad (|q|<1).$$

注意 不是任何无穷数列都有极限.

例如数列 $\{2n\}$，当 n 无限增大时，$2n$ 也无限增大，不能无限地趋近于一个确定的常数，因此这个数列没有极限.

又如数列 $\{(-1)^n\}$，当 n 无限增大时，$(-1)^n$ 在 1 与 -1 两个数上来回跳动，不能无限地趋近于一个确定的常数，因此这个数列也没有极限.

二、函数的极限

★视频

函数极限定义

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.9 如果当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于确定的常数 A，那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A.$$

注意 这里“$x\to\infty$”表示 x 既取正值而无限增大（记作 $x\to+\infty$），同时也取负值而绝对值无限增大（记作 $x\to-\infty$）. 但有的时候 x 的变化趋势只能取这两种变化中的一种情况.

下面给出当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时函数极限的定义.

定义 1.10 如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to+\infty \text{ 时，} f(x)\to A.$$

$$\left[\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to-\infty \text{ 时，} f(x)\to A.\right]$$

【例 1.10】　如图 1-11 所示,利用图象考察当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势.

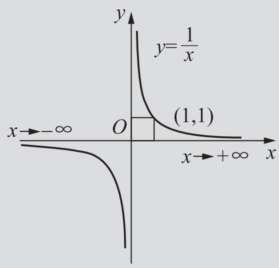

图 1-11

【解】　从图 1-11 中可以看出:当 x 的绝对值无限增大时,函数 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 0,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 显然, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

定义 1.11　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域①内有定义,如果当 x 无限趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近于常数 A,那么 A 就叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A.$$

【例 1.11】　如图 1-12 所示,根据图象求 $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$ 的值.

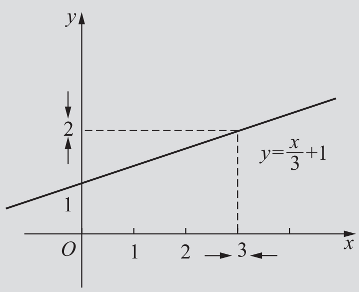

图 1-12

【解】　如图 1-12 所示.

当 x 从 3 的左侧无限趋近于 3 时,即 x 取

$$2.9, 2.99, 2.999, \cdots\to 3$$

时,对应的函数 $f(x)$ 的值从

① x_0 的邻域就是在数轴上满足 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$,其中 $\delta>0$ 的点的集合,即区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内的一切实数. x_0 称为邻域的中心, δ 为半径. 若这个区间不含 x_0 点,则称为 x_0 的空心 δ 邻域.

$$1.97, 1.997, 1.9997, \cdots \to 2.$$

当 x 从 3 的右侧无限趋近于 3 时，即 x 取

$$3.1, 3.01, 3.001, \cdots \to 3$$

时，对应的函数 $f(x)$ 的值从

$$2.03, 2.003, 2.0003, \cdots \to 2.$$

由此可知，当 $x \to 3$ 时，$f(x) = \frac{x}{3} + 1$ 的值无限趋近于 2. 即 $\lim\limits_{x \to 3}\left(\frac{x}{3}+1\right) = 2$.

【例 1.12】 考察极限 $\lim\limits_{x \to x_0} C$（$C$ 为常数）.

【解】 把 C 看成常数函数 $f(x) = C$，则当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒等于 C. 因此有

$$\lim_{x \to x_0} C = C,$$

即常数的极限是它本身.

对于前面提到的 $x \to x_0$，是指 x 以任意方式趋近于 x_0，但有的时候我们只需讨论，从 x_0 的左侧趋近于 x_0（$x \to x_0^-$）或从 x_0 的右侧趋近于 x_0（$x \to x_0^+$）时的极限.

下面给出当 $x \to x_0^-$（$x \to x_0^+$）时，函数 $f(x)$ 的极限.

定义 1.12 如果当 $x \to x_0^-$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**（left limit），记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A, \ f(x_0^-) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (x \to x_0^-).$$

如果当 $x \to x_0^+$ 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 就称为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**右极限**（right limit），记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A, \ f(x_0^+) = A \text{ 或 } f(x) \to A \ (x \to x_0^+).$$

根据 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限的定义和左、右极限的定义，容易得到如下结论：

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 且 } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

【例 1.13】 若函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0, \end{cases}$$

试求 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$、$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

【解】 作出这个分段函数的图象，如图 1-13 所示，可见函数 $f(x)$ 当 $x \to 0$ 时的左极限为

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1,$$

右极限为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

因为当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限虽各自存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

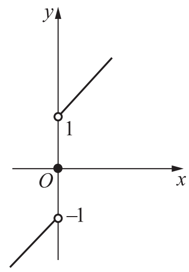

图 1-13

注意　函数在点 x_0 处的极限与函数在该点有没有定义无关.

第三节　无穷小量与无穷大量

在研究函数的变化趋势时，我们发现有两类特殊函数：一是函数值无限趋向于零；二是函数的绝对值“无限变大”. 下面来研究这两种情形.

一、无穷小量

视频

无穷小量

定义 1.13　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，那么称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为**无穷小量**，简称**无穷小**.

例如，当 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 是无穷小；当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小.

注意　(1) 无穷小和绝对值很小的数是截然不同的. 例如，10^{-10} 和 10^{-100} 都是很小的数，但不是无穷小. 只有零是可以作为无穷小的唯一的常数，因为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} 0=0$.

(2) 无穷小和自变量的变化趋势是密切相关的. 例如，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 为无穷小；当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x}$ 就不是无穷小.

二、无穷大量

定义 1.14　如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，那么称函数

$f(x)$当$x \to x_0$(或$x \to \infty$)时为**无穷大量**,简称**无穷大**.

如果按函数极限的定义来看,$f(x)$的极限不存在,但是为了便于叙述,我们称"函数的极限是无穷大",并记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty.$$

如果在无穷大的定义中,对于x_0邻域内的x(或对于绝对值相当大的x),对应的函数值都是正的或都是负的,则这两种情形分别记作

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = -\infty.$$

例如$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$,$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

注意 (1) 无穷大和绝对值很大的数是完全不同的.例如,10^{10},-10^{100}等都是绝对值很大的数,但不是无穷大.

(2) 无穷大和自变量的变化趋势密切相关.例如,函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,当$x \to 0$时,$\dfrac{1}{x}$为无穷大;当$x \to \infty$时,$\dfrac{1}{x}$为无穷小.

三、无穷小量与无穷大量的关系

定理 1.1 在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无穷大,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且$f(x) \neq 0$,那么$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

例如,因为$\lim\limits_{x \to \infty} x^3 = \infty$,所以$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$;因为$\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$,所以$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sin x} = \infty$.

四、无穷小量的性质

在自变量的同一变化过程中,无穷小具有以下三个性质:

性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小.

性质 2 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

性质 3 有限个无穷小的乘积为无穷小.

【例 1.14】 求$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

【解】 因为$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$,$\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant 1$,由无穷小的性质 2 可知,$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$.

【例 1.15】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)$.

【解】 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0$，由无穷小的性质 1 可知，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=0$.

第四节　极限的运算法则

利用极限的定义只能计算一些很简单的函数的极限，对于比较复杂的函数极限，需要用到极限的运算法则来进行计算. 下面给出函数极限的运算法则.

法则 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\cdot B$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}[Cf(x)]=C\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C\cdot A$　(C 为常数)；

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

法则(1)和法则(2)可推广到有限个具有极限的函数的情形.

【例 1.16】 求$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-2)$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}3x-\lim\limits_{x\to 2}2=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x-2=4+6-2=8$.

【例 1.17】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(3+\frac{2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)\right]$.

【解】
$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x^2}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to\infty}3+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\right)\\&=(3+0)(1-0)=3\times 1=3.\end{aligned}$$

【例 1.18】 求$\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^2+x+3}{x^2-3}$.

【解】 原式$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3)}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to1}2x^2+\lim\limits_{x\to1}x+\lim\limits_{x\to1}3}{\lim\limits_{x\to1}x^2-\lim\limits_{x\to1}3}$$

$$=\frac{2+1+3}{1-3}=-3.$$

【例 1.19】 求$\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{x^2-4}$.

【解】 当 $x\to2$ 时,分母的极限为 0,这时不能用法则(4),由于 $x\to2$ 而 $x\neq2$ 即 $x-2\neq0$,因而分式中可约去不为 0 的公因子,得

$$\text{原式}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to2}1}{\lim\limits_{x\to2}x+\lim\limits_{x\to2}2}$$

$$=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}.$$

【例 1.20】 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$.

【解】 令 $t=e^{\frac{1}{x}}$,则当 $x\to0^+$ 时,$t\to+\infty$,这时 $e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{t}$,所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t-\frac{1}{t}}{t+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=1.$$

第五节 两个重要极限

一、判定极限存在的两个准则

为了得出两个重要极限公式,先给出两个判定极限存在的准则.

准则 1 如果函数 $f(x)$,$g(x)$,$h(x)$在同一变化过程中满足

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

且 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$,那么 $\lim f(x)$存在且等于 A.

准则 2 如果数列$\{x_n\}$单调有界,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定存在.

二、两个重要极限公式

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

当 x 趋近于 0 时，函数 $\frac{\sin x}{x}$ 的变化趋势见表 1-1.

表 1-1

x	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{8}$	$\pm\frac{\pi}{16}$	$\pm\frac{\pi}{32}$	$\pm\frac{\pi}{64}$
$\frac{\sin x}{x}$	0.900 316 3	0.974 495 4	0.993 586 9	0.998 394 4	0.999 598 5
x	$\pm\frac{\pi}{128}$	$\pm\frac{\pi}{256}$	$\pm\frac{\pi}{512}$	$\pm\frac{\pi}{1\,024}$	$\pm\frac{\pi}{2\,048}\cdots\to 0$
$\frac{\sin x}{x}$	0.999 899 6	0.999 974 9	0.999 993 7	0.999 998 4	$0.999\,999\,6\cdots\to 1$

从上表中可以看出，当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}\to 1$，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

【例 1.21】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{x}{2}}{x}\right)=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$.

令 $t=\frac{x}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$t\to 0$，因此原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{1}{2}$.

【例 1.22】 求 $\lim\limits_{x\to 0}x\cot x$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\times 1=1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$

当 $x\to\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 的变化趋势见表 1-2.

表 1-2

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.593 74	2.704 81	2.716 92	2.718 15	2.718 27	2.718 28	…
x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5	-10^6	…
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2.867 97	2.732 00	2.719 64	2.718 41	2.718 30	2.718 28	…

从上表中可以看出，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 无限趋近于一个确定的常数，这个常数就是无理数 e=2.718 281 828 45…，即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

在上式中，令 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to0$，于是可以得到另一种形式

$$\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},$$

即

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

【例 1.23】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^3=\mathrm{e}^3$.

第六节 函数的连续性

在许多实际问题中，数量的变化往往是连续的. 例如，气温随时间的变化而变化着，当时间的变化极为微小时，气温的变化也极为微小，这就是说，气温是连续变化的. 下面来研究函数的连续性.

一、函数连续的概念

1. 函数的增量

定义 1.15 设函数 $y=f(x)$，当自变量由初值 x_0 变到终值 x_1 时，我们把差值 x_1-x_0 叫作自变量的**增量**(或**改变量**)，记作 Δx，即

$$\Delta x=x_1-x_0,$$

因此

$$x_1=x_0+\Delta x.$$

这时可以说，自变量由初值 x_0 变化到 $x_0+\Delta x$.

相应地，函数值由 $f(x_0)$ 变化到 $f(x_0+\Delta x)$，我们把差值

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

叫作函数的**增量**（或**改变量**），记作 Δy，即

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

【例 1.24】 在下列条件下，求函数 $y=f(x)=x^2-2$ 的增量.

（1）当 x 由 2 变化到 3；

（2）当 x 由 2 变化到 1.

【解】 （1）由题意可知 $x_0=2$，$x_0+\Delta x=3$，所以

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\\&=f(3)-f(2)\\&=7-2=5.\end{aligned}$$

（2）由题意可知 $x_0=2$，$x_0+\Delta x=1$，所以

$$\begin{aligned}\Delta y&=f(1)-f(2)\\&=-1-2\\&=-3.\end{aligned}$$

2. 函数的连续

定义 1.16 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量 x 在 x_0 处的增量 Δx 趋近于零时，函数 $y=f(x)$ 的相应增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋近于零，也就是说，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

那么称函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

★ 视频

函数的连续性

由于 $x=x_0+\Delta x$，因此 $\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$；$\Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$；$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ 就是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的定义也可叙述如下.

定义 1.17 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 及其近旁有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在并且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么称函数 $y=f(x)$ **在点 x_0 处连续**，x_0 称为函数 $f(x)$ 的**连续点**.

据此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续必须满足以下三个条件：

（1）函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；

（3）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处不连续，那么称函数 $f(x)$ **在 x_0 处是间断的**，点 x_0 称为函数

$y=f(x)$的**间断点**或**不连续点**.

定义 1.18 设函数 $y=f(x)$在 x_0 处及其左(或右)近旁有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ [或 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$],那么称函数 $f(x)$在 x_0 **处左连续(或右连续)**.

定义 1.19 如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续,那么称函数 $f(x)$**在区间(a,b)内连续**,或称函数 $f(x)$为**区间(a,b)内的连续函数**,区间(a,b)称为函数 $f(x)$的**连续区间**.

如果 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上有定义,在区间(a,b)内连续,且在右端点 b 处左连续,在左端点 a 处右连续,即 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$,$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$,那么称函数 $f(x)$**在闭区间$[a,b]$上连续**.

在几何上,连续函数的图象是一条连续不间断的曲线.

【例 1.25】 适当选取 a 的值,使函数

$$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}}, & x<0,\\ x+a, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续.

【解】 因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,所以 $f(x)$在 $x=0$ 处及其近旁有定义.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^2,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+a)=a,$$

所以要使 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,必须 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$,即 $a=\mathrm{e}^2$. 因此当 $a=\mathrm{e}^2$ 时,$f(x)$在 $x=0$ 处连续.

二、初等函数的连续性

1. 连续函数的和、差、积、商的连续性

性质 1 如果函数 $f(x)$与 $g(x)$在点 x_0 处连续,那么它们的和、差、积、商(分母在 x_0 处不等于零)也都在 x_0 处连续,即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=f(x_0)g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}[g(x_0)\neq 0].$$

【例 1.26】 判断 $\tan x$ 和 $\cot x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$处的连续性.

【解】 由于 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$,$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$,而 $\sin x$ 和 $\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$处是连续的,且都不等

于零，所以 $\tan x,\cot x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处也是连续的.

2. 复合函数的连续性

性质 2　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 处连续，那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处也连续.

【例 1.27】　判断 $y=\ln\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处的连续性.

【解】　函数 $u=\sin x$ 在 $x=\frac{\pi}{6}$ 处连续，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$u=\frac{1}{2}$；函数 $y=\ln u$ 在点 $u=\frac{1}{2}$ 处连续；所以，复合函数 $y=\ln\sin x$ 在点 $x=\frac{\pi}{6}$ 处也是连续的.

3. 初等函数的连续性

根据初等函数的定义，由基本初等函数的连续性，连续函数的和、差、积、商的连续性，以及复合函数的连续性可得到下面的重要结论：

性质 3　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

这个结论对于以后判定函数的连续性及一些极限的运算是非常有价值的，如果已知函数 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 属于 $f(x)$ 的定义区间，那么求 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 时，只需将 x_0 代入函数，求函数值 $f(x_0)$ 即可.

【例 1.28】　求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+2\ln(x-1)}{e^x\sqrt{1+x^2}}$.

【解】　因为 $f(x)=\frac{x^2+2\ln(x-1)}{e^x\sqrt{1+x^2}}$ 是初等函数，并且它的定义区间为 $(1,+\infty)$，而 $2\in(1,+\infty)$，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2\ln(x-1)}{e^x\sqrt{1+x^2}}=\frac{2^2+2\ln(2-1)}{e^2\sqrt{1+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5e^2}.$$

三、闭区间上连续函数的性质

闭区间上连续函数具有一些重要的性质，这些性质在理论和实践中都有着广泛的应用.

性质 4　如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定有最大值与最小值.

如图 1-14 所示，可以看出，在 $[a,b]$ 上至少有一点 $\xi(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 使得 $f(\xi)=m$ 为最小值，即 $m=f(\xi)\leqslant f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，又至少有一点 $\eta(a\leqslant\eta\leqslant b)$ 使 $f(\eta)=M$ 为最大值，即 $M=f(\eta)\geqslant f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$.

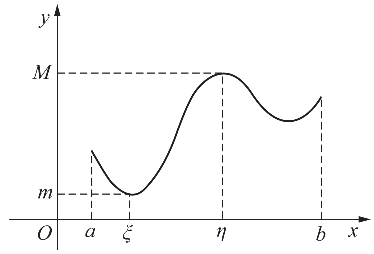

图 1-14

注意 对于在开区间内连续或在闭区间上有间断点的函数，其最大值、最小值不一定存在. 例如，函数 $y=x^2+1$ 在 $(-1,1)$ 内连续，在 $x=0$ 处取得最小值，但在这个区间内没有最大值；而在 $(1,2)$ 内既无最大值，也无最小值.

【例 1.29】 判断函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x=1, \\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上是否有最值.

【解】 函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1, \\ 1, & x=1, \\ -x+3, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$

在闭区间 $[0,2]$ 上有间断点 $x=1$，所以函数在该区间上既无最大值又无最小值(见图 1-15).

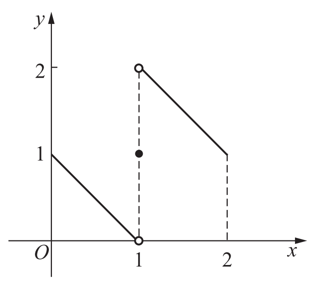

图 1-15

性质 5 如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在两端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$，C 是 A 与 B 之间的任一数，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C \quad (a<\xi<b).$$

这就是著名的介值定理，它的几何意义是：在 $[a,b]$ 上的连续曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=C$ (C 在 A 与 B 之间)至少有一个交点，交点坐标为 $(\xi,f(\xi))$，其中 $f(\xi)=C$，如图 1-16 所示.

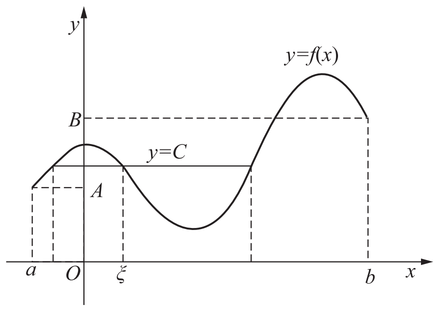

图 1-16

推论　如果函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$，使得 $f(\xi)=0$.

推论的几何意义是：在 $[a,b]$ 上连续的曲线 $y=f(x)$ 两端点落在 x 轴的上、下两侧时，则曲线与 x 轴至少有一个交点，如图 1-17 所示.

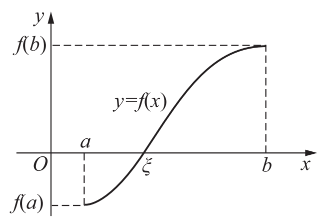

图 1-17

【例 1.30】　证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

【证明】　设 $f(x)=x^3-4x^2+1$，因为它在闭区间 $[0,1]$ 上连续，并且 $f(0)=1>0$，$f(1)=-2<0$，所以根据介值定理的推论可知，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi(0<\xi<1)$ 使得 $f(\xi)=0$，即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0 \quad (0<\xi<1).$$

这个等式说明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在开区间 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

习题一

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $f(x)=\lg(x-4)+\sqrt{x^2-9}$；

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln(1-2x)}$；　　(4) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x-|x|}$；

(5) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ \sqrt{x^2-1}, & |x|\geqslant 1;\end{cases}$　　(6) $f(x)=\arcsin\dfrac{x+1}{2}$.

2. 求下列函数值.

(1) $f(x)=\dfrac{1+|x-1|}{x+1}$,求 $f(-2),f(1),f(0)$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-2x}, & x<0,\\ |\sin x|, & x\geqslant 0,\end{cases}$求 $f(-4),f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right),f(x_0+h)$.

3. 将几个简单函数复合成一个复合函数.

(1) 设 $y=f(u)=e^u$,$u=u(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{x}, & x>0,\end{cases}$写出复合函数 $y=f[u(x)]$的表达式;

(2) 设 $f(x)=5^x$,$g(x)=\log_5 x$,写出 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$,$f[f(x)]$,$g[g(x)]$的表达式.

4. 设置中间变量,将下列复合函数拆开为几个简单函数.

(1) $y=\sin^2(\omega x+\varphi)$($\omega,\varphi$为常数);　　(2) $y=\sqrt{\arctan\sqrt{x}}$.

5. 下列函数是否具有奇偶性? 如有,试指出是奇函数还是偶函数.

(1) $y=x\cos 2x$;　　(2) $y=1+x^4$;

(3) $y=xe^{-x}$;　　(4) $y=\dfrac{\cos x}{x}$;

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(6) $y=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

6. 下列函数是否具有周期性? 如有,试指出其最小正周期.

(1) $y=4\sin\pi x$;　　(2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=|\sin x|+|\cos x|$;　　(4) $y=e^x\cos x$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 1,\\ x, & 1<x<2,\\ 2x-2, & x\geqslant 2,\end{cases}$则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________;$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=$________;

$\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}f(x)=$________;$\lim\limits_{x\to 4}f(x)=$________.

8. 当 $x\to$________时,$f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$是无穷大.

9. 已知 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$,当 $x\to 0$ 时,讨论函数 $f(x)$的极限.

10. 判断下列函数,哪些是无穷大? 哪些是无穷小?

(1) $1+2x$($x\to\infty$时);　　(2) $\tan x$($x\to 0$ 时);

(3) $2^{\frac{1}{x}}$($x\to 0^-$ 时);　　(4) e^{-x}($x\to +\infty$时).

11. 求下列函数的极限.

（1）$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+8x+5}{x^2+x}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+8x+1}{x^2+x}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+8x+5}{x^2+x}$；　　（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{5}{x^2+3x-4}\right)$；

（5）$\lim\limits_{n\to +\infty}\dfrac{1-10^n}{1+10^{n+1}}$；　　（6）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^2-5x+7}{4x-x^2}$；

（7）$\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-3x+5)$；　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-2x^2}}$；

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin x}$；　　（10）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\dfrac{\pi x}{2}}{1-x}$；

（11）$\lim\limits_{h\to 0}4h\cot 3h$；　　（12）$\lim\limits_{n\to +\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$；

（13）$\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^{-2}+3\sqrt{x}}{4-\ln^2(x+1)}+e^{-\frac{1}{x}}\right]$；　　（14）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan x}-1}$.

12. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\leqslant -1, \\ x^2, & -1<x<2, \\ x, & x\geqslant 2, \end{cases}$$

作出函数 $f(x)$的图象,并求：

(1)函数 $f(x)$的定义域；

(2)函数 $f(x)$的间断点.

13. 设 $f(x)=\dfrac{|x|-x}{x}$,求 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$及 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$,并判断$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$是否存在.

14. 证明:方程 $x^5-2x-3=0$ 在区间(1,2)内至少存在一个实根.

★测试题　　★测试题

选择题　　判断题