

第 1 章

理论力学基础—— 构件的静力分析

机器的运行是由于力的作用引起的,构件的受力情况直接影响机器的工作能力。因此,在设计或使用机器时需要对构件进行受力分析。机器平稳工作时,许多构件的运动处于相对静止或匀速运动的状态,即平衡状态。静力学是理论力学的重要组成部分,是研究物体处于平衡状态时所受各力之间关系的一门科学。

任务 1 静力学基础

任务描述: 掌握力的定义及其三要素;

掌握静力学公理及其推论;

掌握约束和约束反力的概念,了解常见的约束类型;

掌握平衡状态下刚体的受力分析,能够准确画出其受力图。

任务分析: 本任务主要介绍静力学的基本理论,作为静力学研究的开始,包括基本概念、假设、公理及研究方法等。

阶段 1 静力分析的基本概念

1. 力的定义

力是物体间的相互机械作用,其概念是人们通过长期的生产实践、科学实验和观察逐步建立起来的。力的作用结果是使物体的运动状态发生改变,即力的外效应或力的运动效应(见图 1-1);或者使物体的形状发生改变,即力的内效应或力的变形效应。

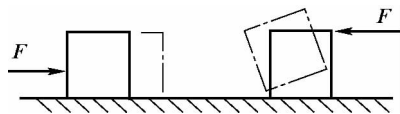


图 1-1 力的外效应

2. 力的三要素及表示方法

力作用的例子相当普遍,无处不在,如重力、压力、摩擦力等。

力对物体的效应(外效应和内效应)取决于力的大小、方向和作用点,这三者被称为力的三要素。

力是一个既有大小又有方向的物理量,所以力是矢量。

可以用一条有向线段表示力矢量。线段的长度(按一定比例尺)表示力的大小;线段的方位和箭头表示力的方向;线段的起始点(或终点)表示力的作用点;通过力的作用点,沿力的方向所画的直线,称为力的作用线(见图 1-2)。

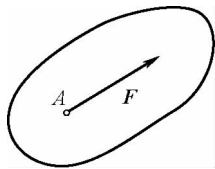


图 1-2 力的表示方法

一般,用黑体大写英文字母表示力矢,如 \mathbf{F} 、 \mathbf{N} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{G} 等(手写时可在字母上方加一横线)。用非黑体大写英文字母如 F 、 N 、 P 、 G 等表示力矢的大小。

力的国际单位为牛顿(N),也可以用千牛(kN)。在工程单位制中,力的单位用千克力(kgf)。二者换算关系为 $1 \text{ kgf} = 9.8 \text{ N}$ 。

3. 刚体

所谓刚体,是指在力作用下,大小和形状保持不变的物体。

这是一个抽象化的理想的力学模型。在工程实际中常用的构件材料,如钢、铸铁、混凝土、木材及陶瓷等,在一般力的作用下产生的变形很小。如果微小变形对所研究物体的平衡问题不起主要作用,可以忽略不计,这样可以使问题的研究大为简化而不影响计算结果的准确性。

在静力学中,常把研究的物体视为刚体。

4. 平衡

平衡是指物体相对于地球保持静止或作匀速直线运动的状态。

若一力系施加于物体并使物体处于平衡状态,则该力系称为平衡力系。力系是指作用于刚体上的一组力。

平衡是相对的,物体的平衡是物体机械运动的特殊形式。物体的平衡规律远比一般运动规律简单。在工程中遇到的很多机械零件、部件等物体的平衡问题,都需要静力学分析计算。因此,平衡规律应用广泛。

使物体平衡的力系需满足的条件称为力系的平衡条件。

静力学是研究物体处于平衡状态时所受各力之间关系的一门学科。

5. 受力图

在实际工程中,为了便于对物体进行受力分析,常常把物体从限制其运动的周围物体中分离出来,画出其简图,然后在图中用力矢量的表示方法画出物体的受力情况,这样的图称为受力图。

阶段 2 静力学公理

人们通过对长期生活、生产实践积累的经验 and 科学实验结果加以总结、归纳和抽象,建

立了一些静力学的基本公理。这些公理概括了力的性质,是在实践和认识过程中反复抽象总结出来的客观规律,也是静力学的基本理论基础。

公理 1 二力平衡公理

作用在刚体上的两个力,使刚体保持平衡的必要与充分条件是:这两个力大小相等,方向相反,且作用在同一条直线上,如图 1-3 所示。

二力平衡公理揭示了作用于物体上最简单的力系在平衡时所需满足的条件。即

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0} \text{ 或 } \mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$$

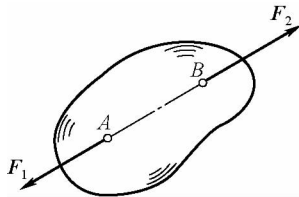


图 1-3 二力平衡

工程上只受两个力作用而平衡的刚体,称为二力构件,当构件呈杆状时称为二力杆。二力构件平衡时,其所受的两个力必沿两力作用点的连线,且等值、反向。

如图 1-4 所示,当支架 AC,BC 自重不计时,属于二力杆。如图 1-5 所示,构件 CD 在自重不计时也是二力杆。在进行构件受力分析时,应注意判断其是否为二力构件,这样能够使问题顺利解决。

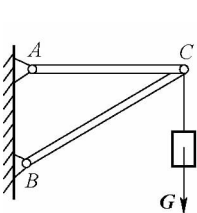


图 1-4 支架

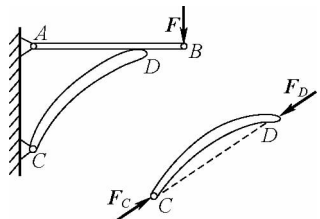
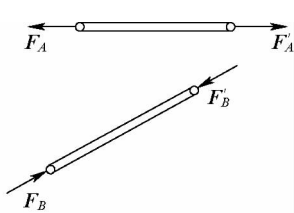


图 1-5 二力构件

公理 2 加减平衡力系公理

在作用着已知力系的刚体上,加上或者减去任意的一个平衡力系,并不改变原力系对刚体的作用效果。这一公理是研究力系等效变换的理论基础。

推论:力的可传性原理

作用在刚体上的力可沿其作用线移动,而不会改变该力对刚体的作用效果。

如图所示的小车,在 A 点作用力 F 和在 B 点作用力 F 对小车的的作用效果是相同的(见图 1-6)。

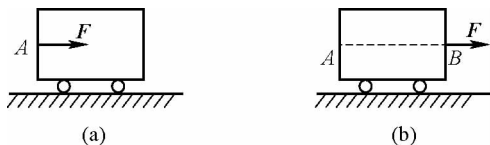


图 1-6 力的可传性原理

公理 3 力的平行四边形公理

作用于刚体上某一点(汇交点)的两个力可以合成为一个合力。其合力也作用在汇交点上,合力的方向和大小由两个已知力为邻边所构成的平行四边形的对角线来确定。此公理也称为平行四边形法则,如图 1-7(a)所示。

写成矢量式为
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

为了方便,在用矢量加法求合力时,可不必画出整个平行四边形,而是从 A 点作一个与力 \mathbf{F}_1 大小相等、方向相同的向量 \overrightarrow{AB} ,过 B 点作一个与力 \mathbf{F}_2 大小相等、方向相同的向量 \overrightarrow{BC} ,则 \overrightarrow{AC} 就是力 \mathbf{F}_1 、 \mathbf{F}_2 的合力 \mathbf{F} 。这种求合力的方法称为力的三角形法则,如图 1-7(b)所示。

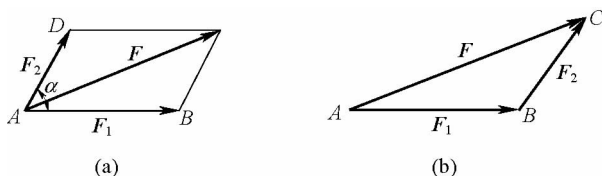


图 1-7 平行四边形公理和力的三角形法则

推论:三力平衡汇交定理

若刚体受到同一平面内互不平行的三个力的作用而平衡,则三个力的作用线必汇交于一点(见图 1-8)。

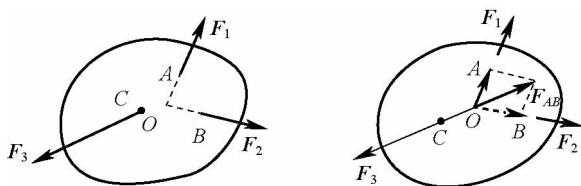


图 1-8 三力平衡汇交定理

公理 4 作用与反作用公理

两物体间的作用力与反作用力总是同时存在,且大小相等、方向相反、沿同一条直线,分别作用在两个物体上。

如图 1-9 所示,悬挂在天花板上的两个圆球 A 和 B,球 A 给球 B 的作用力 \mathbf{F}'_N 和球 B 给球 A 的作用力 \mathbf{F}_N 构成了一对作用力与反作用力。如图 1-10 所示的车刀与工件之间也存在作用力与反作用力。

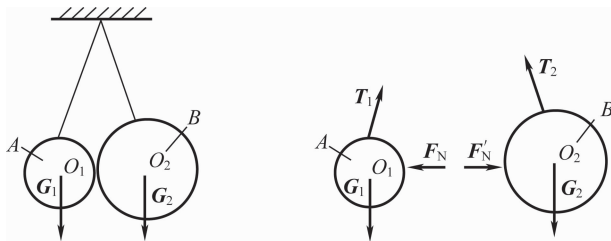


图 1-9 作用力与反作用力(一)

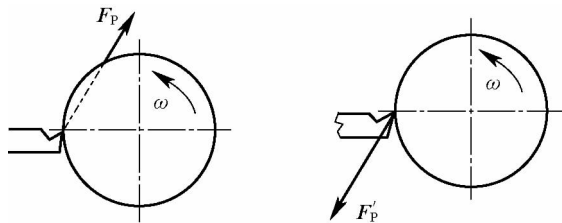


图 1-10 作用力与反作用力(二)

作用力与反作用力公理揭示了自然界物体之间相互作用的关系:所有力总是成对出现的;有作用力就必有反作用力;它们互相依存、同时出现、同时消失,分别作用在相互作用的两物体上。

必须强调的是,作用力与反作用力虽等值、反向、共线,但它们分别作用在不同的物体上,故不能互成平衡、互相抵消。这与二力平衡公理中的“一对平衡力”是有本质区别的,不能混淆。

阶段 3 约束和约束反力

1. 约束和约束反力的概念

如果物体在空间任何方向的运动都不受限制,可以做任意运动,则该物体称为自由体,如在空间飞行的飞机、炮弹和漂浮的气球等。

凡是因为受到周围其他物体的限制而不能做任意运动的物体称为非自由体或叫被约束体,如天花板上挂着的灯泡、机车和机床的刀具等。

凡是限制某些物体运动的其他物体,称为约束。如灯绳对灯泡、桌子对放在桌子上的物体、铁轨对机车、轴承对电机转子和机床刀夹对刀具等,都是约束。

约束对非自由体的限制作用实质上就是力的作用,这种力称为约束反力,简称反力。由于约束的作用是限制物体的运动,所以约束反力的方向总与该约束所能限制的运动方向相反,其作用点在约束和被约束物体相互连接或接触点之处。

与约束反力相对应,凡是能使物体产生运动或使物体产生运动趋势的力称为主动力,例如物体受到的重力、外力等。主动力一般是给定的或可以测定的。工程中常称主动力为载荷。

所以,物体上的受力可以分成两类:主动力和约束反力。主动力是指使物体产生运动或运动趋势的力,而约束反力是约束对物体运动起限制作用的力。

至于约束反力的大小总是未知的,在静力学中可以利用相关平衡条件由已知力求出约束反力。

2. 常见约束的类型和约束反力的确定

(1) 柔性约束(柔索)

由钢丝绳、绳索、链条或传送带等非刚性体所形成的约束称柔性约束,如图 1-11 所示。

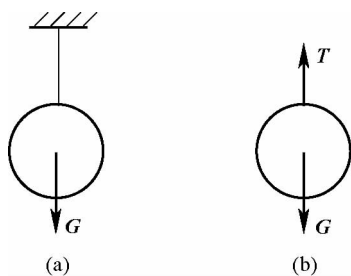


图 1-11 绳索柔性约束

柔性约束产生的约束反力只能是拉力,所以该约束反力作用在接触点处,方向沿着柔体的中心线背离被约束物体,通常用 T 或 F_T 表示,如图 1-12 所示。

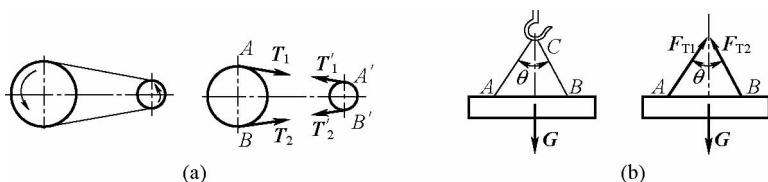


图 1-12 柔性约束举例

(2) 光滑面约束

物体与光滑面形成点、线、面刚性接触(接触面间摩擦力很小,忽略不计)所形成的约束,称为光滑面约束。

光滑面约束的约束反力是支撑力或压力,其方向沿接触面的公法线指向被约束物体。此类约束反力也称为法向反力,通常用 N 或 F_N 表示,如图 1-13 所示。

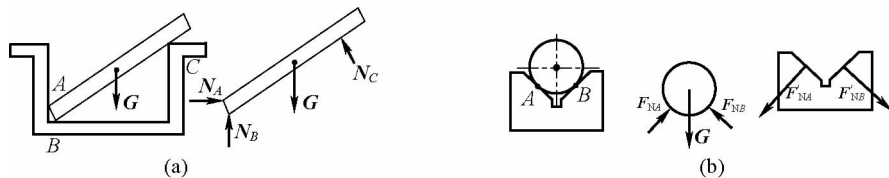


图 1-13 光滑面约束

光滑面可以是平面,如导轨、桌面等,也可以是曲面,如摩擦轮间的接触、齿轮啮合时的轮齿面等(见图 1-14)。

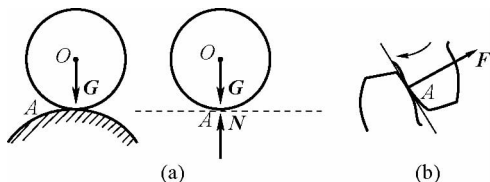


图 1-14 光滑面约束

(3) 光滑铰链约束

工程上铰链常见结构是:用圆柱形销钉将两个开有销钉孔的零件连接起来,形成一种可动连接。这时销钉只能限制两零件相对移动而不能限制它们的相对转动,忽略销钉与被约

束两零件接触面间很小的摩擦,此类约束称为光滑铰链约束(见图 1-15)。

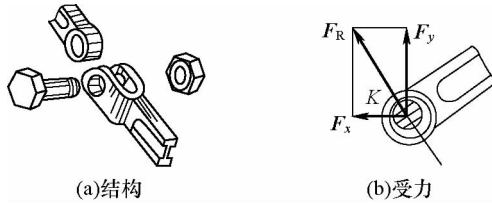


图 1-15 光滑圆柱铰链

工程上光滑圆柱铰链约束又分为三种约束形式:中间铰链约束,如图 1-16 所示;固定铰链支座约束,如图 1-17 所示;活动铰链支座约束,如图 1-18 所示。

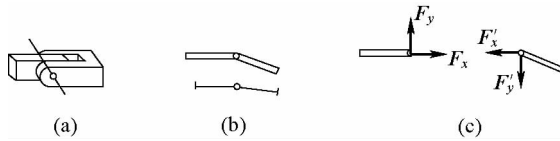


图 1-16 中间铰链约束及约束反力

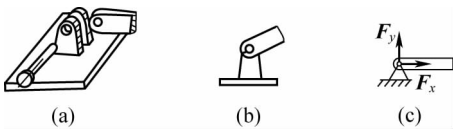


图 1-17 固定铰链支座约束及约束反力

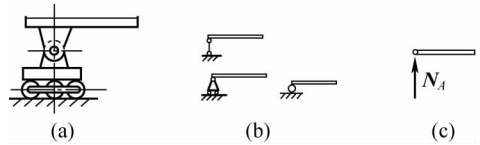


图 1-18 活动铰链支座约束及约束反力

由于销钉与被约束零件之间实际上是光滑圆柱面接触,在未知约束反力确切指向的情况下(接触点不能确定),一般将约束反力用假定的两个正交分力 F_x 和 F_y 来表示。中间铰链约束反力和固定铰链支座约束反力均可以用此办法表示。活动铰链支座约束只能限制物体沿支撑面法线方向的运动,其约束反力 N 的作用线通过销钉中心垂直于支撑面指向被约束物体。

(4) 固定端约束

物体的一部分嵌于另一物体所构成的约束,称为固定端约束。车床刀架上的刀具、卡盘上的工件等都属于这种约束(见图 1-19)。

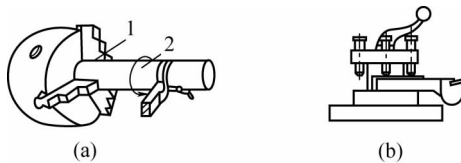


图 1-19 固定端约束

1—卡盘;2—工件

固定端约束的构件可以用一端插入刚体的悬臂梁来表示,这种约束限制物体沿任何方向的移动和转动,其约束作用包括限制移动的两个正交约束反力 F_x 、 F_y 和限制转动的约束

反力偶 M_A (见图 1-20)。



图 1-20 固定端约束反力

阶段 4 物体的受力和受力图

物体的受力分析就是将研究对象从周围的约束中分离出来(也叫解除约束),分析其所受到的主动力和约束反力,并确定各力作用点、方向及大小的过程。

通常就将这种因解除了约束,而被人为当作自由体的构件称为分离体。

将分离体上所受的全部主动力和约束反力以力矢形式表示在分离体上所得到的图形,称为受力图。

恰当地选取研究对象,正确地画出构件的受力图是解决力学问题的关键。

画受力图的具体步骤如下:

- ①明确研究对象,单独画出分离体;
- ②在分离体上画出所有的主动力;
- ③根据约束类型,在分离体上画出相应的全部约束反力。

【例题 1-1】 如图 1-21(a)所示,一匀质球体,球心为 O ,重力为 G ,用绳索系在天花板上,同时靠在光滑的墙面上(不计球与墙间的摩擦力),试分析球体的受力情况,并画出受力图。

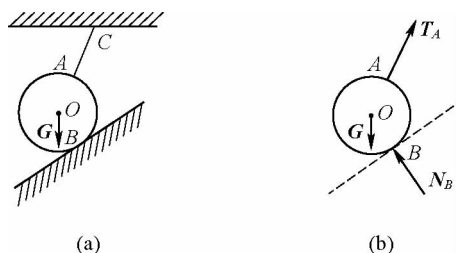


图 1-21 受力图画法实例一——匀质球体

解:取球体为研究对象,把球体从周围的约束中分离出来,成为分离体,并进行受力分析。

①球体受到自身重力(地球引力) G 的作用,作用点为重心,方向沿铅垂线向下。

②在 A 点,球体受到绳索的约束,被限制向下及向左的运动趋势,属于柔性约束。因此球体在 A 点受到约束反力——绳索的拉力 T_A 的作用,方向沿绳索背离球体的方向。

③在 B 点,球体受到斜面的支撑约束,被限制向下及向右的运动趋势,因不计摩擦力,属于光滑接触面约束。因此,球体在 B 点受到约束反力——斜面支撑力 N_B 的作用,方向沿 B 点处的公法线指向球体。

④画球体的受力图。先画球体的简图,依次在球体上准确画出球体的重力 G 、来自绳索的约束反力 T_A 和来自斜面的约束反力 N_B ,并清楚标明各力矢的作用点,如图 1-21(b) 所示。

【例题 1-2】 如图 1-22(a) 所示,重力为 G 的均质圆球 O 由杆 AB 、绳索 CB 与墙支持,各处摩擦不计,分别画出球 O 与杆 AB 的受力图。

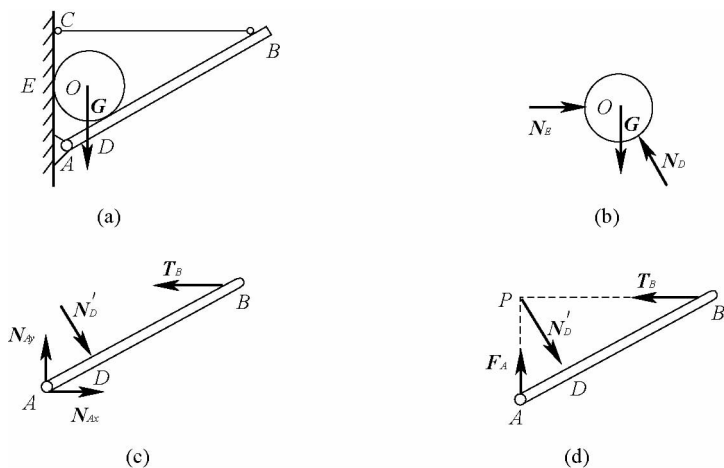


图 1-22 受力图画法实例二——均质球支架

解:①取球 O 为研究对象,成为分离体。对球 O 受力分析:球受到的主动力是 G ,杆 AB 和墙给球的支撑力 N_D 和 N_E ,如图 1-22(b) 所示。

②对杆 AB 进行受力分析。取杆 AB 为研究对象,解除约束使其成为分离体。 AB 杆在 D 点受到球的压力 N'_D (N_D 和 N'_D 是一对作用力与反作用力),在 B 点受到绳子的拉力 T_B ,在 A 点是固定铰链,应用正交分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 来表示受力情况,如图 1-22(c) 所示,但根据三力平衡汇交定理可以判定,在铰链 A 处受到的力 F_A 应经过 N'_D 和 T_B 的交点 P ,如图 1-22(d) 所示。

【例题 1-3】 如图 1-23(a) 所示,折梯的 AB 、 AC 杆在 A 点用铰链连接,并在 D 、 E 两点用水平线绳相连。梯子的 AB 杆上有铅垂载荷 P ,不计梯子自重和接触面的摩擦。试画 AB 、 AC 杆的受力图。

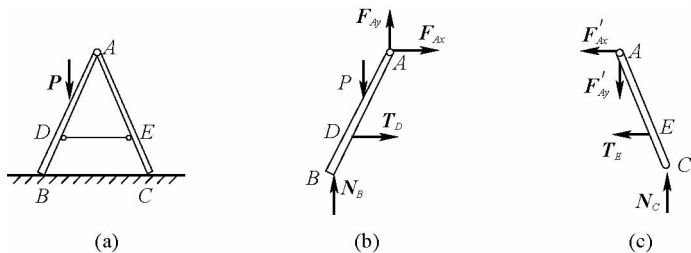


图 1-23 受力图画法实例三——折梯

解:①取杆 AB 为研究对象,解除约束使其成为分离体。其上主动力是 P ,在 B 点有地面的支撑力 N_B ,在 D 点有绳子的拉力 T_D ,在 A 点受到 AC 杆的约束,因铰链连接,用一对

正交分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表达,如图 1-23(b)所示。

②取杆 AC 为研究对象,解除约束使其成为分离体。其上在 C 点有地面的支撑力 N_C ,在 E 点有绳子的拉力 T_E ,在 A 点受到 AB 杆的约束,用一对正交分力 F'_{Ax} 和 F'_{Ay} 表达约束反力。注意 F_{Ax} 和 F'_{Ax} 、 F_{Ay} 和 F'_{Ay} 这些作用力与反作用力的表达,如图 1-23(c)所示。

【例题 1-4】 如图 1-24(a)所示结构,由杆 AC 、 CD 与滑轮 B 铰接组成。重物 W 用绳子挂在滑轮上。杆、滑轮及绳子的自重不计,并忽略摩擦,试分别画出滑轮 B 、重物 W 、杆 AC 、 CD 及整体的受力图。

解:①以滑轮和绳索为研究对象,解除 B 、 E 、 H 三处的约束,画出其分离体图。在 B 点为光滑铰链,画出销钉对轮孔的约束反力 X_B 和 Y_B ,在 E 、 H 处有绳索的拉力 T_E 和 T_H 。其受力情况如图 1-24(b)所示。

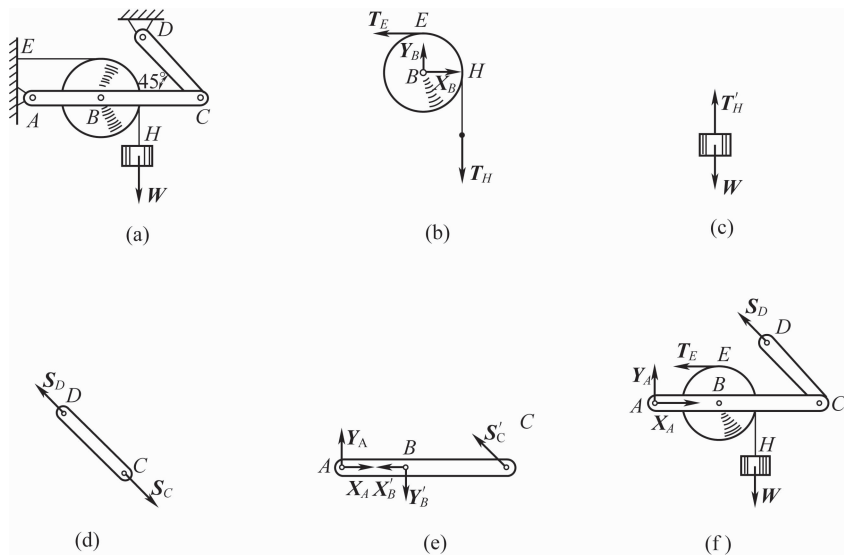


图 1-24 受力图画法实例四

②以重物为研究对象,解除 H 处的约束,画出其分离体图。画出主动力 W ,在 H 处有绳索的拉力 T'_H 。 T_H 和 T'_H 是一对作用力与反作用力,其受力情况如图 1-24(c)所示。

③以二力杆 CD 为研究对象,画出分离体图。由于 CD 受拉(当指向不明,先假定一方向),在 C 、 D 处画上拉力 S_C 和 S_D ,且 $S_C = -S_D$,其受力情况如图 1-24(d)所示。

④以 AC 杆为研究对象,解除 A 、 B 、 C 三处的约束,画出其分离体图。在 A 点为固定铰链支座,画出约束反力 X_A 和 Y_A 。在 B 处画上 X'_B 和 Y'_B ,它们和 X_B 、 Y_B 分别是一对作用力与反作用力。在 C 点处画上 S'_C ,它和 S_C 是一对作用力与反作用力,其受力情况如图 1-24(e)所示。

⑤以整体为研究对象,解除 A 、 E 、 D 处的约束,画出其分离体图。画出主动力 W ,画出约束反力 X_A 和 Y_A 。画出约束反力 S_D 和 T_E ,其受力情况如图 1-24(f)所示。对整体系统来说, B 、 C 、 H 三处受的均是内力作用,在受力图上不必画出。

通过上述例题可知,画受力图的过程中必须注意以下事项。

①首先必须明确研究对象,并画出分离体。分离体的形状和方位须和原物体保持一致。

②在分离体上画出全部主动力和约束反力。

在分离体上要标明各力的名称及作用点的位置。力不能多画也不能少画,力的作用位置不能任意改变。

在画约束反力时,应严格区分约束类型,确定相应的约束反力,约束类型总结如下。

柔性约束——带、绳的拉力
光滑约束——法向支撑力

} 约束反力有确定的指向

二力杆件——沿两点连线方向的拉力或压力

中间铰链——两个垂直分力

固定铰链——两个垂直分力

活动铰链——法向支撑力

固定端约束——两个垂直分力,还有一个反力偶

} 约束反力没有确定的指向

③在进行机构的受力分析时,若机构存在二力构件,应先画其受力图,再进行其他构件的受力分析。

④画受力图时,要注意二力平衡公理、三力平衡汇交定理及作用力与反作用力公理的正确应用。

⑤当选取的研究对象是物体系统(由若干构件组成的组合体)时,系统内力不画在受力图上。

阶段 5 平面力系的概念

静力分析的主要问题是力系的合成与平衡。通过对构件或物体进行受力分析,简化力系;利用构件(或物体)的平衡条件,由已知力求未知力的大小并确定未知力的方向。

力系有各种不同的类型。

按照力系中各力是否在同一平面内,将力系分为平面力系和空间力系。

①平面力系:各力作用线都在同一平面内的力系。

②空间力系:各力作用线不同在同一平面内的力系。

按照力系中各力是否相交或平行,将平面力系分为平面汇交力系、平面力偶系、平面平行力系和平面任意力系。平面汇交力系、平面力偶系、平面平行力系是平面任意力系的特例。

①平面汇交力系:在同一平面内,各力的作用线相交于一点的力系。

②平面力偶系:在同一平面内,由若干力偶所组成的力系(力偶的概念见本章任务3的相关内容)。

③平面平行力系:在同一平面内,各力的作用线相互平行的力系。

④平面任意力系:在同一平面内,各力的作用线既不完全交于一点又不完全平行的力系。

任务 2 平面汇交力系

任务描述: 掌握平面汇交力系的合成方法;

掌握平面汇交力系平衡的条件。

任务分析: 从本任务开始,将研究各种类型力系的合成。本任务主要介绍平面汇交力系的简化方法及其平衡条件。

阶段 1 平面汇交力系力的合成与简化

平面汇交力系在工程中有广泛的应用,其作用效果相当于合成的一个合力。合力指一个与作用于物体上的力系等效的力。平面汇交力系合成的方法有几何法和解析法。

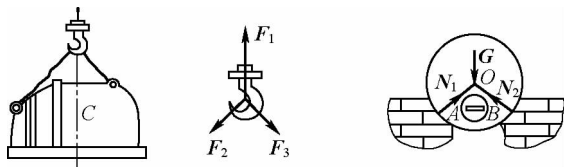


图 1-25 平面汇交力系的工程实例

1. 平面汇交力系合成的几何法

(1) 两个力的合成——平行四边形法则或力的三角形法则

作用在物体上任意两个不平行的力 F_1 和 F_2 , 根据力的可传递原理, 其作用线必汇交。将两力移至汇交点处, 以汇交的两个力为邻边, 做平行四边形, 两力的合力在这个平行四边形的对角线上, 即可求出合力 F , 如图 1-26(b) 所示。也可以用力的三角形法则, 将两个力矢量首尾相接, 合力 F 是由第一个力的起点指向第二个力的终点, 如图 1-26(c) 所示。

合力的矢量式为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

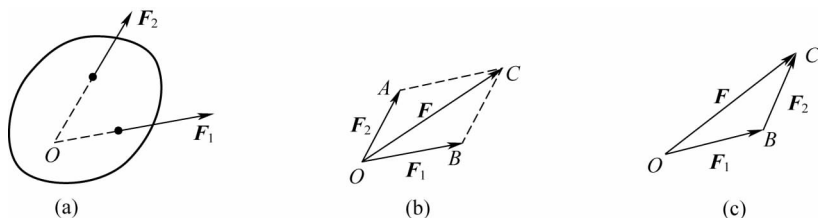


图 1-26 力的平行四边形法则和三角形法则

(2) 多个汇交力的合成——力的多边形法则

可以连续使用“力的三角形法则”求得任意多个汇交力的合力。

简化后得到力的多边形法则: 由力 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ 组成的汇交力系可以合成为一个